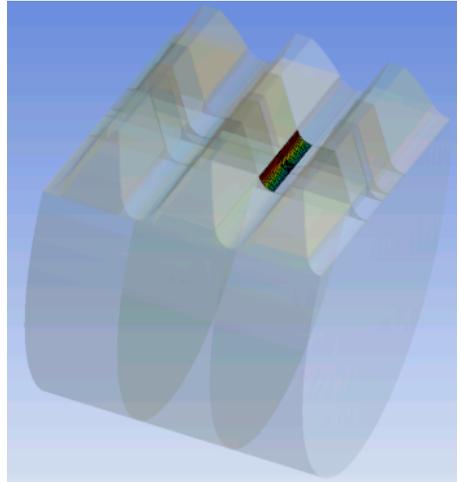


# Numerische Bestimmung des Zahnkopffaktors für kreisförmige Fußausrundung an Zahnstangen

Arslan, G.;

*DIN 3990 erlaubt u.a. die Berechnung der Zahnfußbiegespannung von Zahnradern. Die Berechnungsvorschrift wurde experimentell an außenverzahnten gerad- und schrägverzahnten Stirnräder verifiziert. Sie wird auch bei der Auslegung von Zahnstangenverzahnungen angewandt. Es ist hier von Interesse, ob die Gültigkeit der DIN 3990 hinsichtlich Zahnfußbiegespannung auch für Zahnstangen gegeben ist. In diesem Artikel wird die Zahnfußbiegespannung, ausgedrückt über den Zahnkopffaktor, numerisch durch Parametervariationen bestimmt.*



*DIN 3990 allows e.g. the calculation of tooth root stress of gears. The calculation rule was verified experimentally on externally toothed spur and helical gears. She is also applied in the design of rack gears. It is of interest whether the validity of the DIN 3990 is also provided with regard to root stress for racks. In this article, the tooth root stress, expressed over the tip factor, determined numerically by parameter variations.*

## 1 Einleitung

Obwohl die Zahnstange als Maschinenelement in der Technik weit verbreitet ist, gibt es sehr wenige Veröffentlichungen darüber. Die meisten Veröffentlichungen sind über außenverzahnte Stirnräder zu finden. Die DIN 3990 /1/ führt mehrere Methoden auf, um die Zahnfußbiegespannung zu ermitteln. Die Methode A ist die genaueste, aber auch zugleich die aufwändigste. Bei der Methode A kann die Zahnfußbiegespannung, über experimentelle Messungen mittels DMS-Beklebung am Bauteil oder durch numerische FE- Analyse, bestimmt werden. Sie wird selten angewandt. Die am häufigsten verwendeten Methoden sind B und C. Bei der Methode B erfolgt der

Kraftangriff am äußeren Einzeleingriffspunkt, siehe Abbildung 1 links. Um diesen Einzeleingriffspunkt bestimmen zu können, müssen die Geometriedaten der Gegenverzahnung vorliegen. Dagegen kann bei der Methode C die Zahnfußbiegespannung unabhängig von der Gegenverzahnung bestimmt werden. Aus Abbildung 1 rechts kann entnommen werden, dass der Kraftangriff von der Kopfkante ausgeht.

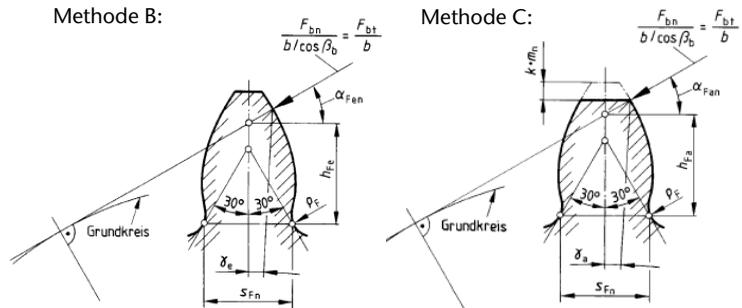


Abbildung 1: Kräfteinleitungsort nach DIN 3990 Methode B und C

Nach DIN 3990 gehen die Zahnfußbrüche von der 30°-Tangente in der Zahnfußaustrundung aus. Die Zahnfußsehnendicke  $s_{Fn}$  wird an der 30°-Tangente bestimmt, der Biegehebelarm  $h_{Fe}$  (Methode B) bzw.  $h_{Fa}$  (Methode C) werden auf die 30°-Tangente bezogen. Diese beiden Größen und der Fußrundungsradius  $\rho_F$  werden zur Bestimmung des Formfaktors  $Y_{Fa}$  und des Spannungskorrekturfaktors  $Y_{Sa}$  benötigt. Obwohl die Methode C höhere Werte für die Zahnfußbiegespannung ausgibt als die Methode B, wird sie hier eingesetzt, da der Einfluss von Geometrien untersucht werden kann, ohne Kenntnisse von der Gegenverzahnung haben zu müssen. Die Bestimmungsgleichung der Zahnfußbiegespannung für geradverzahnte Zahnstangen im Pulsatorbetrieb reduziert sich auf

$$\sigma_{F, Met.C} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{FS, Met.C}, \quad (1)$$

wobei  $F_t$  die Zahnnormalkraft,  $b$  die Zahnbreite und  $m_n$  der Normalmodul ist.

Die Gleichungen für den Spannungskorrekturkorrektor  $Y_{Sa}$  und Formfaktor  $Y_{Fa}$  sind im Folgenden aufgeführt:

$$Y_{Sa} = \left( 1,2 + 0,13 \cdot \frac{s_{Fn}}{h_{Fa}} \right) \cdot \left( \frac{s_{Fn}}{2 \cdot \rho_F} \right)^{(1/(1,21+2,3 \cdot h_{Fa} / s_{Fn}))} \quad (2)$$

$$Y_{Fa} = 6 \cdot \frac{h_{Fa}^* \cdot \cos \alpha_{Fan}}{s_{Fn}^2 \cdot \cos \alpha_n} \Rightarrow Y_{Fa} = 6 \cdot \frac{h_{Fa}^*}{s_{Fn}^2} \quad (3)$$

Größen, die mit einem Stern versehen sind, werden auf den Normalmodul bezogen. Der Kraftangriffswinkel  $\alpha_{Fan}$  ist bei der Zahnstange der Normaleingriffswinkel  $\alpha_n$ . Die Zahnbreite bei der Zahnstange ist im Gegensatz zu Stirnrädern nicht konstant.

Der numerische Kopffaktor  $Y_{FS,FEM}$  kann nach Gleichung (4) ermittelt werden

$$Y_{FS,FEM} = \sigma_{F,FEM} \cdot \frac{b \cdot m_n}{F_t}, \quad (4)$$

wobei die Zahnfußspannung  $\sigma_{F,FEM}$  aus der FE-Berechnung, die Zahnbreite  $b$  an der 30°-Tangente und der Normalmodul  $m_n$  aus den Geometriedaten zu entnehmen sind.

## 2 Parameterbasierte FE-Untersuchungen

Eine Zahnstangenverzahnung mit kreisförmiger Fußausrundung wird durch sieben Parameter – Zahnstangendurchmesser  $d_{zsf}$ , Normalmodul  $m_n$ , Normaleingriffswinkel  $\alpha_n$ , Kopfdickenfaktor  $s_a^*$ , Kopflinie  $r_a$ , Fusslinie  $r_f$  und Fußausrundungsradius  $\rho_F$  – beschrieben.

In der Tabelle 1 sind alle 9 Grundgeometrien aufgelistet. Der aufgeführte Fußausrundungsradius  $\rho_F$  gilt für die angegebene Fusslinie  $r_f$ .

Der Fußausrundungsradius lässt sich nach folgender Gleichung berechnen

$$\rho_F = \left( \frac{s_{if}}{2} - s_0 \right) \cdot \frac{\cos \alpha_n}{1 - \sin \alpha_n}, \quad (5)$$

wobei  $s_{if}/2$  die Zahnlückenmittenhälfte,  $s_0$  der Versatz der Zahnlückenmitte ist. Überschreitet der Fußausrundungsradius die Fußnutzlinie  $r_{Nf}$ , so muss durch Anpassen des Versatzes  $s_0$  der Fußausrun-

dungsradius verkleinert werden. Diesen Sachverhalt verdeutlichen die zwei Bilder in Abbildung 2b und c.

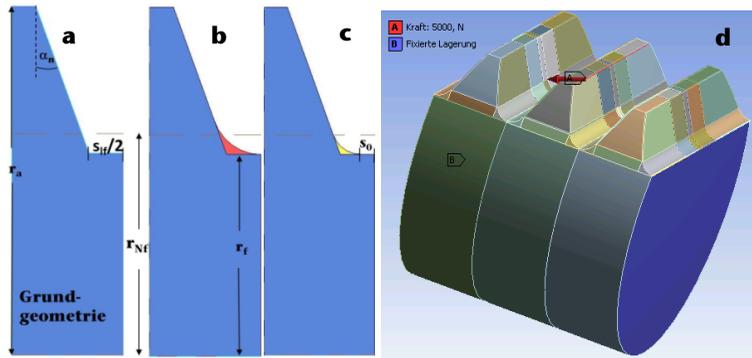


Abbildung 2: Grundgeometrie und Randbedingungen der FE-Analyse

Bezeichnung	$d_{ZS}$ [mm]	$m_n$ [mm]	$\alpha_n$ [°]	$s_{a^*}$ [-]	$r_a$ [mm]	$r_f$ [mm]	$s_{if}/2$ [mm]	$\rho_F$ [mm]
Geo 01	26	1,85	20	0,6	9,2	5,2	0,895	1,278
Geo 02	26	2	20	0,6	9,2	5,2	1,086	1,551
Geo 03	26	2,1	20	0,6	9,2	5,2	1,213	1,732
Geo 04	26	1,85	22,5	0,6	9,2	5,2	0,694	1,039
Geo 05	26	1,85	25	0,6	9,2	5,2	0,486	0,762
Geo 06	26	1,85	20	0,5	9,2	5,2	0,988	1,410
Geo 07	26	1,85	f20	0,4	9,2	5,2	1,080	1,543
Geo 08	31	1,85	20	0,6	11,6	7,6	0,895	1,278
Geo 09	36	1,85	20	0,6	14,5	10,5	0,895	1,278

Tabelle 1: Untersuchungsprogramm für Parameterstudie

Die FE-Analysen und Parameterstudien sind in Ansys Workbench durchgeführt worden. In Abbildung 2d sind die Randbedingungen dargestellt. Die Fixierung wird an den beiden Stirnflächen der dreizähligen Zahnstange vorgenommen. Die Kraft  $F=5000\text{N}$  wird als Linienlast auf die Kopfkante senkrecht zur Flanke des mittleren Zahnes aufgebracht. Den FE-Analysen liegt ein linear elastisches Werkstoffmodell zugrunde, mit einem E-Modul von  $210.000\text{N/mm}^2$ .

In den Abbildungen 3 bis 8 ist die numerisch und analytisch berechnete Zahnfußbiegespannung bzw. Kopffaktor für verschiedene Parameter gegenübergestellt. In Abbildung 3 wird bei gleichbleibender Fusslinie der Fußausrundungsradius variiert.

Folgende Ergebnisse können zusammengefasst werden:

Die analytisch berechnete Zahnfußbiegespannung bzw. Kopffaktor weist kleinere Werte auf, als die numerischen. In Abbildung 8 sind alle Grundgeometrien in Abhängigkeit von der Fusslinie aufgetragen. Im Mittel beträgt der relative Fehler 15%. Der Fehler nimmt mit abnehmender Fusslinie bis zu 30% zu.

Vergößern des Normalmoduls, des Normaleingriffswinkels, des Zahnstangendurchmesser und Verkleinern des Kopfdickenfaktors führt zur kleineren Spannungswerten.

Der Kerbeffekt ist in Abbildung 3 sehr deutlich zu sehen. Bei gleicher Fusslinie nimmt die Zahnfußbiegespannung mit kleiner werdendem Fußausrundungsradius stark zu.

Bei Variation der Fusslinie, wie in Abbildungen 4,5 und 7 zu sehen ist, nimmt die Zahnfußspannung mit kleiner werdender Fusslinie nicht so deutlich zu, wie bei Variation des Fußausrundungsradius. In Abbildung 5 ist für die Geometrievarianten 6 und 7 die Zahnfußspannungen bis zu mittleren Fusslinie-Werten abnimmt, bevor sie wieder zunimmt.

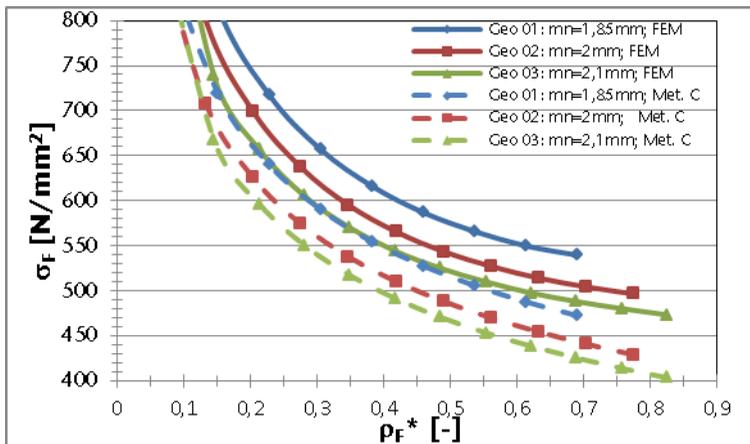


Abbildung 3: Einfluss des Fußausrundungsfaktors  $\rho^*$  auf die Zahnfußbiegespannung in Abhängigkeit vom Normmodul  $m_n$

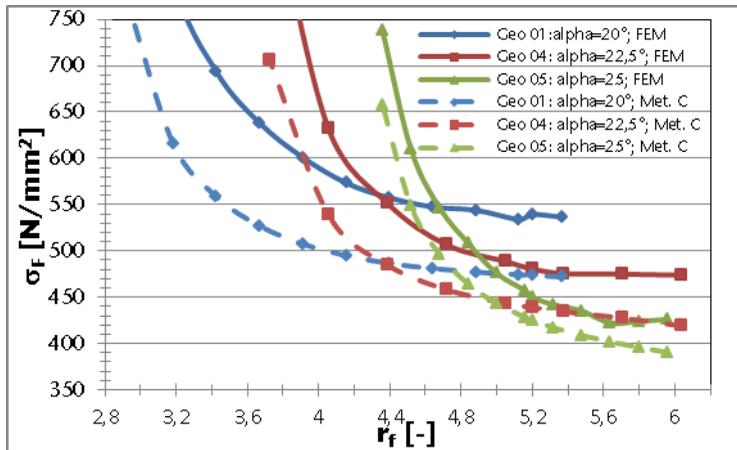


Abbildung 4: Einfluss der Fusslinie  $r_f$  auf die Zahnfußbiegespannung in Abhängigkeit vom Normaleingriffswinkel  $\alpha_n$

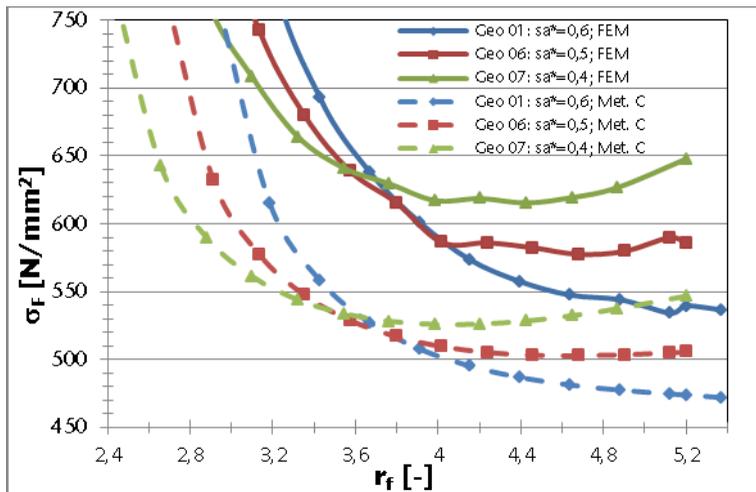


Abbildung 5: Einfluss der Fusslinie  $r_f$  auf die Zahnfußbiegespannung in Abhängigkeit vom Zahnkopfdickenfaktor  $s_a^*$

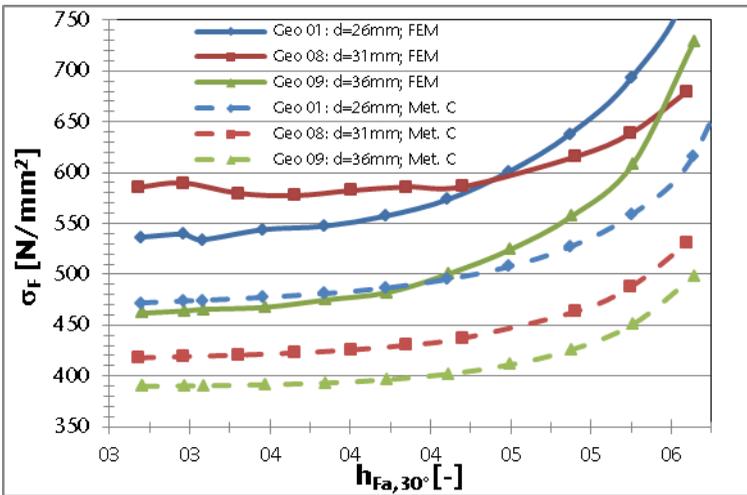


Abbildung 6: Einfluss der Zahnhöhe auf die Zahnfußbiegespannung in Abhängigkeit vom Zahnstangendurchmesser  $d_{zS}$

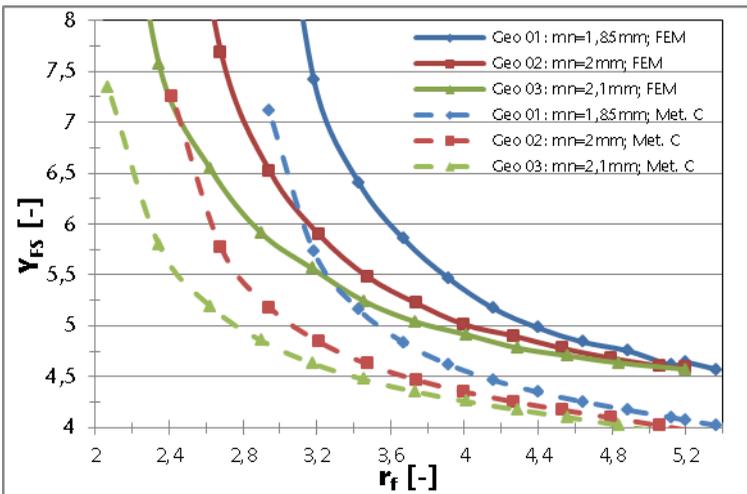


Abbildung 7: Einfluss der Fusslinie  $r_f$  auf den Kopffaktor  $Y_{FS}$  in Abhängigkeit vom Normalmodul  $m_n$

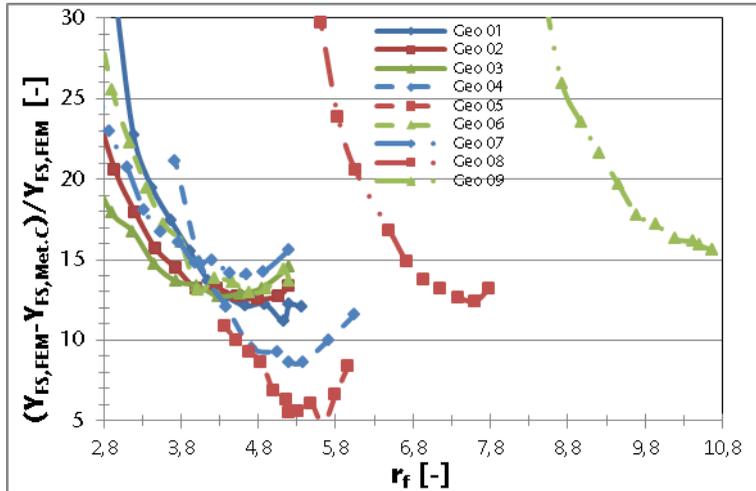


Abbildung 8: Einfluss der Fusslinie  $r_f$  auf den relativen Fehler

$$\frac{(Y_{FS,FEM} - Y_{FS,MeT.C})}{Y_{FS,FEM}} \text{ für die 9 Grundgeometrien}$$

### 3 Zusammenfassung

In Ansys Workbench wurde eine automatisierte Parameterstudie zur Bestimmung der Zahnfußbiegespannung bzw. des Kopffaktors durchgeführt. Die Ergebnisse sind mit den analytischen Gleichungen nach DIN 3990 verifiziert worden. Die numerischen Ergebnisse liegen im Schnitt um 15% höher. Eine Anpassung des Kopffaktors kann für Zahnstangen vorgenommen werden. So kann im nächsten Schritt der Kopffaktor für alternative Zahnfußausrundungsformen bestimmt werden, welche dann den Anwendern zur Verfügung gestellt werden kann.

### 4 Literatur

- /1/ Norm DIN 3990 Teil 1-3: Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern, Dez.1987