

Tragfähigkeitssteigerungen von Maschinenelementen durch teilplastische Verformungen

Dietz, P.

Durch Ausnutzung des plastischen Verformungsvermögens üblicher Maschinenbauwerkstoffe läßt sich die Tragfähigkeit von Maschinenelementen erheblich steigern. Der Aufsatz stellt an einigen Beispielen die Kriterien zur Auslegung von Bauteilen mit teilplastischen Verformungen dar. Es gelten dabei andere Versagensmechanismen als bei der linear-elastischen Berechnung, die von der Überschreitung von Grenzdehnungen bis zur Abschätzung von Steifigkeitsverlusten reichen. Teilplastische Verformungen können auch zum „Trainieren“ von Verbindungen mit Mehrfacheingriff genutzt werden.

The acceptance of plastic deformations in machine elements leads to increased load capacity. The publication describes criteria to design structures with partly plastic deformations by some characteristic examples. Mechanisms of failure change compared with the linear-elastic dimensioning of machine parts, new criteria are for example limiting stresses or the loss of stiffness. Plastic deformations can be used for „training“ connections with multiple working contacts as splined joints.

1 Einführung

Die Grenzbeanspruchung von Maschinenbaustrukturen wird heute in den weitaus meisten Fällen nach dem Kriterium des linear-elastischen Verhaltens der Bauteile und ihrer Materialien ermittelt. Eine solche Betrachtung "auf der sicheren Seite" unterschätzt grundsätzlich die Beanspruchbarkeit des Bauteils, da die plastische Verformbarkeit und das damit verbundene Arbeitsaufnahmevermögen nicht berücksichtigt werden. Die bei solchen Berechnungen gesetzte untere Schranke hat aber auch den Vorteil, daß das Deformationsverhalten einfach abgeschätzt werden kann. Die Nutzung des plastischen Verformungsvermögens wird in vielen Fällen unter dem Begriff "Streckgrenzenverhältnis" als zusätzliche Sicherheit genutzt, bis auf wenige Fälle wie z.B. beim elastisch-plastischen Schrumpfverband oder bei der Berechnung dickwandiger Rohre im Apparatebau werden teil-

plastische Beanspruchungs- und Verformungszustände im Festigkeitsnachweis von Maschinenbaustrukturen nicht verwendet. Zulässige teilplastische Verformungen oder zulässige Größen von plastisch deformierten Zonen sind normalerweise nicht bekannt, daneben gibt es aber fallspezifische Betrachtungen wie zulässige Gesamtverformungen oder die Ausnutzung der Verfestigung bei mehrfacher Belastung (low cycle fatigue). Meist steht auch dem Aufwand einer Berechnung oder experimentellen Bestimmung die Unsicherheit bei der Interpretation der Ergebnisse gegenüber. Lediglich in der mechanischen Umformtechnik wird bewußt nach der Verformbarkeit durch plastisches Fließen ausgelegt, um beispielsweise die Betriebskräfte von Fließpressen, Tiefziehmaschinen usw. zu berechnen.

Die kontrollierte Berücksichtigung von Beanspruchungen und Verformungen im teilplastischen Bereich kann aber erheblich zur Steigerung der Tragfähigkeit und zum Leistungsvermögen von Maschinenbauteilen beitragen, da

- durch das Fließvermögen des Werkstoffs Spannungsspitzen infolge Verteilung auf weniger beanspruchte Bauteilbereiche abgebaut werden,
- durch die örtlich unterschiedlichen Verformungen nach Entlastung Eigenspannungszustände vorherrschen können, die zu einer Entlastung beitragen, und
- aufgrund der Materialverfestigung die Grenzbeanspruchungen steigen.

Die Frage nach einer Versagenshypothese unter Ausnutzung plastischer Verformungsanteile ist in der Literatur nur in Sonderfällen behandelt, z.B. für die Rißausbreitung in duktilen Werkstoffen /1, 2, 3/ oder die Berechnung teilplastisch beanspruchter rotationssymmetrischer Preßverbindungen nach DIN 7190 /4/. Eine sinnvolle Grenze besteht z.B. in der Vorschrift, daß das Bauteil nicht "durchplastiziert", wie dies in (**Bild 1**) am Beispiel einer Lasche gezeigt wird. Man geht davon aus, daß die bei teilplastischer Verformung übrigbleibende elastische Zone eine Stützwirkung gewährleistet und das

Verformungsverhalten sich nicht wesentlich von dem im linear-elastischen Bereich unterscheidet.

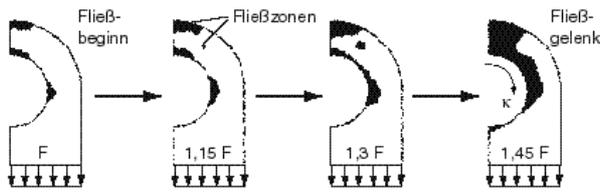


Bild 1: Plastifizierungsfolgen einer spielbehafteten Bolzen-Lasche-Verbindung. κ = Kontaktwinkel des Bolzen-Lasche-Kontakts; F = Zuglast

Im folgenden soll an einigen Beispielen gezeigt werden, wie teilplastische Verformungen im Rahmen einer Tragfähigkeitsrechnung behandelt werden können und wie man - abhängig vom jeweiligen Anwendungs- und Versagensfall - eine Strategie zur Optimierung von Maschinenteilen unter Ausnutzung von Teilplastizität entwickeln kann.

Rechnerisch läßt sich das Fließvermögen und die Verfestigung des Werkstoffs sinnvoll auswerten, wenn man die Spannungs-Verformungsbeziehungen nach Überschreiten der Fließgrenze durch mathematische Beziehungen formuliert, die bei einfachem Aufbau eine möglichst große Annäherung an die gemessenen Verläufe des Zugversuchs gestatten /1, 2, 3/. Am bekanntesten sind die folgenden Darstellungen:

- Elastisch-idealplastisches Materialverhalten (**Bild 2**, Kurve 1)

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_s} = \frac{\sigma}{\sigma_s} \quad \text{für} \quad \frac{\sigma}{\sigma_s} \leq 1; \quad \epsilon \text{ unbegrenzt anwachsend für} \quad \frac{\sigma}{\sigma_s} = 1$$

- Elastisch-plastisches Materialverhalten mit linearer Verfestigung (**Bild 2**, Kurve 2)

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_s} = \frac{\sigma}{\sigma_s} \quad \text{für} \quad \frac{\sigma}{\sigma_s} \leq 1; \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_s} - 1 = m \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} - 1 \right) \quad \text{für} \quad \frac{\sigma}{\sigma_s} \geq 1$$

- Elastisch-plastisches Verhalten mit exponentieller Verfestigung (**Bild 2**, Kurve 3)

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_s} = \frac{\sigma}{\sigma_s} \quad \text{für} \quad \frac{\sigma}{\sigma_s} \leq 1; \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_s} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} \right)^n \quad \text{für} \quad \frac{\sigma}{\sigma_s} \geq 1$$

Alle folgenden Darstellungen beruhen auf den mechanischen Bedingungen isotroper und homogener Werkstoffe, die zur Anwendung kommende Fließbedingung ist die Gestaltänderungsenergiehypothese (v. Mises). Die Ergebnisse beruhen im wesentlichen auf der Berechnung mit finiten Elementen an typischen Maschinenbeispielen, auf die Entwicklung geschlossener Lösungen im Sinne von /2/

und /3/ wurde zugunsten einfacher, an den Konstrukteur gerichteter Aussagen und Konstruktionsregeln verzichtet.

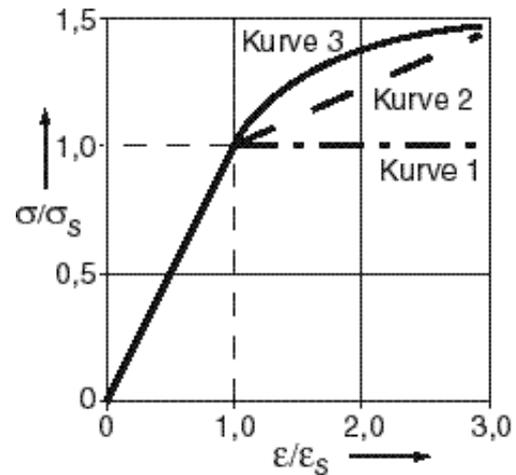


Bild 2: Elastisch-plastisches Materialverhalten. Kurve 1: Elastisch-idealplastisches Verhalten, Glg.(1). Kurve 2: Elastisch-plastisches Verhalten mit linearer Verfestigung, Glg. (2). Kurve 3: Elastisch-plastisches Verhalten mit exponentieller Verfestigung, Glg. (3)

2 Versagenskriterium Festigkeit unter teilplastischer Beanspruchung

2.1 Beispiel: Bolzen-Lasche Verbindung

Im folgenden Beispiel soll anhand eines Bauteils unter zweiachsiger Beanspruchung gezeigt werden, daß allein durch das teilplastische Verformungsvermögen und die damit einhergehende Umverteilung der Beanspruchungen erhebliche Tragfähigkeitssteigerungen errechnet werden können. Als Materialgesetz wird elastisch-idealplastisches Verhalten (Kurve 1 in **Bild 2**) vorausgesetzt, die Berücksichtigung der Materialverfestigung ergäbe weitere Reserven zur Laststeigerung.

Der als Beispiel gewählte Augenstab zeigt bereits im elastischen Beanspruchungsbereich eine Kopplung von Verformung und Beanspruchung, die von den geometrischen Verhältnissen (Kopf- und Wangenquerschnitte), vom Spiel zwischen Bolzen und Lasche und von der Höhe der Belastung abhängen. **Bild 3** zeigt als Ergebnis einer FE-Berechnung die Radial- und Schubspannungen einer solchen Verbindung, es lassen sich damit eindeutig eine ungleichmäßige Beanspruchungsverteilung und damit gefährdete Bereiche feststellen /6/.

Das Einsetzen örtlicher plastischer Verformungen führt hier zu einer Umverteilung der Beanspruchun-

gen und zu einem Abbau der Spannungsspitzen an den Berührstellen der spielbehafteten Verbindung - die Lasche "wickelt" sich infolge plastischer Verformung um den Bolzen. Da das Verhältnis von Zug/Druck- und Biegespannungen von der geometrischen Form abhängt, ist eine zusammenfassende Aussage über den Tragfähigkeitsgewinn durch Ausnutzen teilplastischer Verformungen nur beispielhaft möglich.

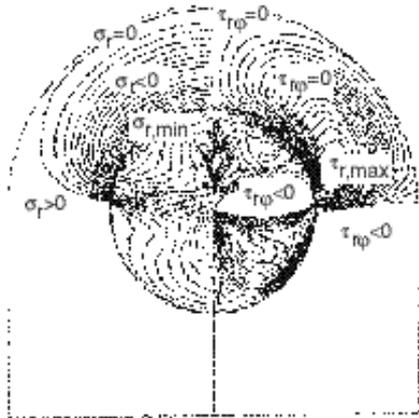


Bild 3: Linien gleicher Spannungen in einem Augenstab unter Zug mit einem Spiel von 0,1%. Ergebnisse einer Rechnung mit finiten Elementen. Links: Radialspannung σ_r , Rechts: Schubspannung $\tau_{r\phi}$. Die Tangentialspannung ist auf diesem Bild nicht dargestellt.

Bild 4 zeigt den Tangentialspannungsverlauf in der Laschenwange bei steigender Belastung, deutlich sieht man die Zunahme der plastischen Verformung und damit die erforderliche Spannungsverlagerung bei den höheren Lasten. Hieraus ist auch die im Bild erkennbare Verlagerung der neutralen Faser bei starken teilplastischen Verformungen erkennbar. Dies ist nur möglich bei Biegebeanspruchung, bei der im Fall der Überschreitung der Fließgrenze an der Außenfaser der "Reservebereich" im Inneren des Biegequerschnitts zur Verfügung steht.

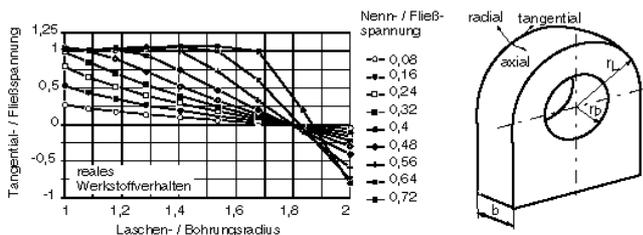


Bild 4: Tangentialspannungsverlauf in der Laschenwange bei steigender Belastung für reales elastisch-plastisches Werkstoffverhalten. Ergebnisse von FEM-Rechnungen.

Die Auswertung einer Reihe von Berechnungen mit kombinierter Zug/Druck- und Biegespannung läßt eine Verallgemeinerung bei der Einschätzung der Tragfähigkeitssteigerung in ebenen Spannungszuständen zu. Das Lösungsfeld in **Bild 5**, das aus mehr als 1000 Berechnungen mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente entstanden ist, zeigt Bereiche des Werkstoffverhaltens bei der Annahme elastisch-idealplastischen Werkstoffverhaltens. Aufgetragen sind die jeweils auf die Streckgrenze normierten maximalen Zug/Druck- und Biegespannungen in den Laschenquerschnitten, wenn eine rein elastische Rechnung durchgeführt würde:

- Das Feld der rein elastischen Beanspruchungen (iEaE) reicht bei reiner Biegebeanspruchung und reiner Zugbeanspruchung bis zu den Quotienten +1 und -1. Dazwischen lassen sich die Beanspruchungen linear miteinander verknüpfen.
- Um dieses Feld herum liegen die Felder einseitig plastischer Verformung (iEaZ, iEaD, iDaE und iZaE). Bei reiner Biegebeanspruchung bzw. reiner Zugbeanspruchung erreichen sie eine minimale, bei einer kombinierten Beanspruchung eine maximale Ausdehnung. Die eingezeichnete Gerade zeigt am Beispiel eines Verhältnisses von Biege- zu Zugspannungsanteil von zwei, daß bis zu einem Verhältnis $\sigma_z/\sigma_s = 0,32$ der elastische Bereich nicht verlassen wird (Pkt. 1). Bei größer werdender Belastung beginnt die Lasche außen unter Zugbeanspruchung zu fließen, während sie innen noch im elastischen Bereich verbleibt. Der Moment des Fließgelenks (Durchplastizierung) tritt bei einer Erhöhung der Last um 67% gegenüber dem rein elastischen Zustand ein (Pkt. 2).
- Bei überwiegender Biegebeanspruchung schließt sich ein Feld der beidseitig plastischen Beanspruchung an (iZaD und iDaZ). Aufgrund der elastisch-idealplastischen Rechnung ist dieser Zuwachs im Bereich der Zug/Druckbeanspruchung gleich Null.
- Außerhalb dieser Zone liegt das Gebiet der nicht realisierbaren Lösungen, bei denen die Lasten so groß sind, daß eine Durchplastizierung stattfindet.

Bereits mit Hilfe dieser vereinfachten Betrachtung läßt sich der Tragfähigkeitsgewinn bei elastisch-idealplastischem Materialverhalten gut abschätzen. Die Tragfähigkeitsgrenze kann neben der Bildung

des Fließgelenks auch dadurch erreicht werden, daß im teilplastischen Verformungsgebiet die Grenzdehnung des Werkstoffs überschritten wird.

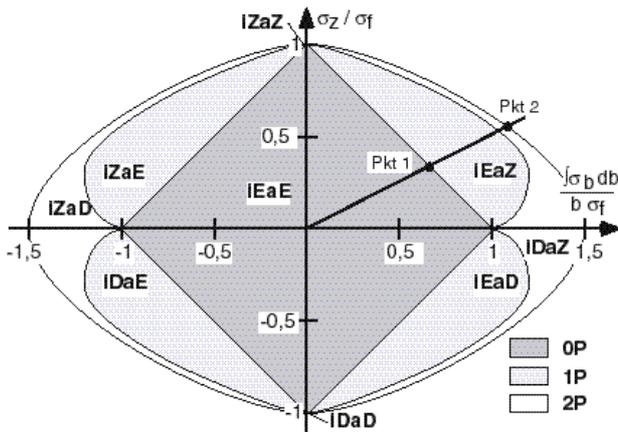


Bild 5: Lösungsfelder bei elastischer und teilplastischer Verformung infolge unterschiedlicher Belastungskombinationen aus Biege- und Zug/Druckbeanspruchung am Beispiel von Laschenverbindungen (gilt auch für den Fall der Beanspruchung krummer Balken). IEaE = innen und außen elastisch, iZaE = innen teilplastischer Zug und außen elastisch, iDaE = innen teilplastischer Druck und außen elastisch, iDaD = innen und außen teilplastischer Druck usw.; 0P = keine plastische Verformung, 1P = plastische Verformung auf einer Biegeseite, 2P = plastische Verformung im Zug- und Druckspannungsbereich der Biegezone). Pkt.1: Grenze des elastischen Bereichs; Pkt. 2: Fließgelenk im beschriebenen Beispiel

3 Versagenskriterium Steifigkeit unter teilplastischer Verformung

3.1 Beispiel Preßverband mit konstruktiven Schwächungen

Im Gegensatz zu dem bisher betrachteten Beispiel der Laschenverbindung, bei der teilplastische Verformungen keine wesentlichen Einflüsse auf die Funktion der Verbindung ausüben, sind bei dem folgenden Beispiel des Preßverbandes Steifigkeit und Verformung entscheidend für die Funktionserhaltung. Die Theorie des ebenen Spannungszustandes zur Berechnung teilplastisch beanspruchter Preßverbindungen entsprechend DIN 7190 geht davon aus, daß eine verbleibende elastische Zone eine hinreichende Stützwirkung zur Aufrechterhaltung des Vorspannungszustandes ausübt. /4/ und /5/ arbeiteten für elastisch-plastisch beanspruchte rotationssymmetrische Preßverbände ein Ausle-

gungsverfahren aus, das als Fließbedingung die modifizierte Schubspannungshypothese benutzt, mit dem auch das Verhalten verfestigender Werkstoffe gut wiedergegeben werden kann. Nach diesem Verfahren kann gegenüber der rein elastischen Auslegung ein bis zu 2,31-faches Übermaß zugelassen werden.

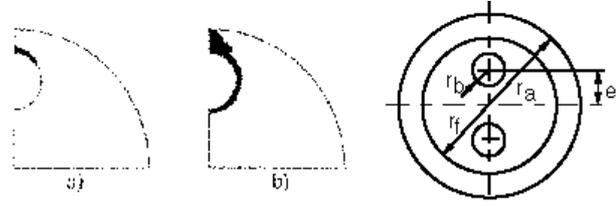


Bild 6: Plastische Zonen einer geschrumpften Welle mit 2 Bohrungen ohne Fügeflächenreibung. a) Überschreitung des bei elastischer Verformung maximal zulässigen Übermaßes um 10%. b) Überschreitung um 40%. Abmessungsverhältnisse der gerechneten Verbindung $r_b/r_f = 0,2$; $e/r_f = 0,625$; $r_f/r_a = 0,7$.

Der Zusammenhang von plastisch verformten Bereichen der Welle-Nabe-Verbindung auf das Steifigkeits- und damit auch Tragverhalten soll im folgenden an Preßverbindungen erläutert werden, die konstruktive Unregelmäßigkeiten wie Bohrungen, Nuten o.ä. aufweisen, bei denen also bereits im elastischen Bereich kein rotationssymmetrischer Spannungszustand vorherrscht. Zur Simulation des elastisch-plastischen Verhaltens der Konstruktionswerkstoffe wird ein linear verfestigendes Verhalten gewählt (Kurve 2 in **Bild 2**). Als Fließbedingung wird die Gestaltänderungsenergiehypothese (v.Mises) angenommen.

Am Beispiel einer durch zwei Bohrungen geschwächten Welle ohne Fügeflächenreibung (Ölpreßverband) zeigt **Bild 6** die plastische Zone bei zunehmendem Übermaß. Die vom Bohrungsrand mit der höchsten Beanspruchung ausgehende plastische Zone nimmt mit steigendem Übermaß zu und erreicht schließlich im Grenzfall die Fügefläche. Für dieses Beispiel zeigt **Bild 7** den auf die Streckgrenze R_e bezogenen durchschnittlichen Fugendruck \bar{p} in Abhängigkeit vom auf die elastische Dehnung an der Streckgrenze ϵ_s bezogenen Übermaß \bar{u}_{egrenz} . Hieraus kann zunächst anschaulich folgendes abgeleitet werden:

- Solange die maximale Bohrungsrandspannung σ_{vmax} kleiner als die Streckgrenze R_e ist, wird die Welle rein elastisch beansprucht (Bereich 1 in **Bild 7**).

- Wenn die maximale Bohrungsrandspannung σ_{vmax} die Streckgrenze Re überschreitet, wird die Welle teilplastisch beansprucht. Solange die dünnste Stelle zwischen Bohrungsrand und Fügefläche nicht vollplastisch beansprucht wird, weicht der durchschnittliche Fugendruck \bar{p} nur "geringfügig" von der Linearität ab (Bereich 2 in **Bild 7**). Durch die Stützwirkung der verbleibenden elastischen Zonen behalten die plastischen und elastischen Dehnungen die gleiche Größenordnung und die Steifigkeit des Schrumpferverbandes bleibt fast unverändert. Dieser Bereich ist für die Erhöhung der Tragfähigkeit durch Zulassen teilplastischer Verformung konstruktiv besonders wichtig. Bei dem hier gerechneten Beispiel kann die Übertragungsfähigkeit durch Ausnutzen des teilplastischen Bereichs um 40% gegenüber einer rein elastischen Auslegung erhöht werden.
- Mit Erreichen der vollplastischen Durchverformung krümmen sich die Fugendruck-Übermaß-Linien stärker mit abnehmendem Verfestigungsmodul E_{pl}/E , Glg. 2 (Bereich 3 in **Bild 7**).

Unter Berücksichtigung zugelassener teilplastischer Verformung ergeben sich - je nach konstruktiver Ausbildung des gestörten Preßverbands - mehrere Auslegungsgrenzen und die Bedingung für den Grenzdruck

$$\bar{p}_{pgrenz} = \min(\bar{p}_{Sbf}, \bar{p}_{Sbb}, \bar{p}_F)$$

Dabei ist \bar{p}_{Sbf} eine Steifigkeitsbedingung und bezeichnet den mittleren Paßfugendruck, bei dem die dünnste Stelle zwischen Bohrungsrand und Fügefläche gerade vollplastisch beansprucht wird (Übergang Bereich 2 / Bereich 3 in **Bild 7**). Die Grenze \bar{p}_{Sbb} bezeichnet den mittleren Fugendruck, bei dem im Fall mehrerer Bohrungen eine Durchplastizierung in den Stegen zwischen den Bohrungen erfolgt und dadurch eine Steifigkeitsminderung erreicht wird. \bar{p}_F bezeichnet eine Festigkeitsgrenze, bei der die plastische Dehnung eine Grenzdehnung überschreitet. Dieser Grenzwert ist wesentlich durch die Verfestigungseigenschaften des Konstruktionswerkstoffes bestimmt (**Bild 8**).

Die Ausbildung teilplastischer Zonen ist von der geometrischen Gestalt der Verbindung und der Störungen abhängig. Das in **Bild 9** gezeigte Beispiel einer aufgepreßten Nabe mit Sackbohrung zeigt neben den bisher betrachteten kritischen Bereichen der geschwächten Nabe (Zone 1 und 2)

eine weitere Festigkeitsgrenze im Bereich des plastisch verformten Bohrungsendes (Kerbwirkung durch Bohrerspitze, Zone 3). Zur detaillierten Berechnung von gestörten Preßverbindungen verschiedener Ausführungsformen sei auf /7/ verwiesen.

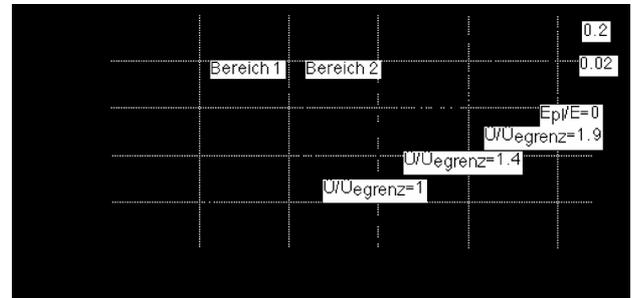


Bild 7: Fugendruck-Übermaßverhältnis einer geschrumpften Welle mit 2 Bohrungen ohne Fügeflächenreibung. $\bar{u} = (r_{fWelle} - r_{fNabe})/r_f$ auf den Fügeflächenradius bezogenes Übermaß ; \bar{u}_{egrenz} Übermaß bei Erreichen der Streckgrenze an einem Punkt der Verbindung ; E_{pl}/E Verhältnis der Steigungen im plastischen und elastischen Bereich im Zugdiagramm (vergl. Bild 2, Kurve 2) bei linearer Verfestigung im plastischen Bereich. Abmessungsverhältnisse der gerechneten Verbindung $r_v/r_f = 0,2$; $e/r_f = 0,625$; $r/r_a = 0,5$.

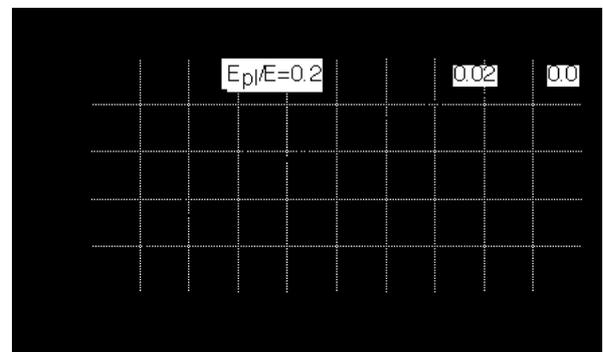


Bild 8: Übertragungsfähigkeit einer durch Bohrungen geschwächten, geschrumpften Welle in Abhängigkeit von einer zulässigen plastischen Dehnung. p_F/p_{egrenz} durch die Grenzdehnung bedingter maximaler mittlerer Fugendruck bezogen auf den durch den elastischen Bereich bedingten mittleren Fugendruck ; $\epsilon_{pzul}/\epsilon_S$ maximal zulässige plastische Dehnung bezogen auf die elastische Grenzdehnung, Werkstoffeigenschaft; E_{pl}/E Verhältnis der Steigungen im plastischen und elastischen Bereich im Zugdiagramm (vergl. Bild 2, Kurve 2) bei linearer Verfestigung im plastischen Bereich.

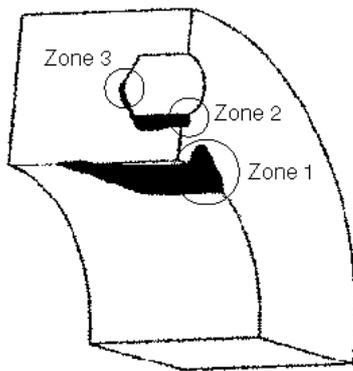


Bild 9: Plastische Zonen an einer aufgeschrumpften Nabe mit Sackbohrung. Zone 1: Plastizieren an der Fügefläche im Bereich der Schwächung durch die Bohrung. Zone 2: Plastische Verformung an der Stirnseite der Bohrung. Zone 3: Plastische Verformung am Bohrungsgrund durch die Kerbwirkung (Bohrerspitze)

Die dargestellten Beispiele machen deutlich, daß sich auch unter der Bedingung eines vorwiegend elastisch bedingten Vorspannungsverhaltens die Übertragungsfähigkeit von Preßverbindungen durch Zulassen teilplastischer Verformungen wesentlich erhöhen läßt, solange die plastischen Verformungen in der Größenordnung der elastischen Verformungen bleiben. Diese Erhöhung wird durch die von den Geometrieparametern abhängigen Steifigkeitsbedingungen und die von den Materialparametern abhängigen Festigkeitsbedingungen begrenzt.

4 Versagenskriterium Verformung

4.1 Beispiel Seiltrommel unter mehrlagiger Bewicklung

Mit dem hier geschilderten Beispiel soll der Fall verhältnismäßig großer plastischer Verformungen angesprochen werden, bei denen die plastischen Dehnungen für die Tragfähigkeit der Struktur nahezu ohne Belang sind, während die Verformungen selbst zu empfindlichen Funktionseinbußen führen. Dies tritt besonders bei druckbelasteten Maschinenelementen auf, bei denen das Verfestigungsverhalten in Verbindung mit der Querschnittszunahme zu einer Vergrößerung des "Streckgrenzenverhältnisses" im Druckbereich führen. Die hier als Beispiel gewählte Seiltrommel zeichnet sich dadurch aus, daß

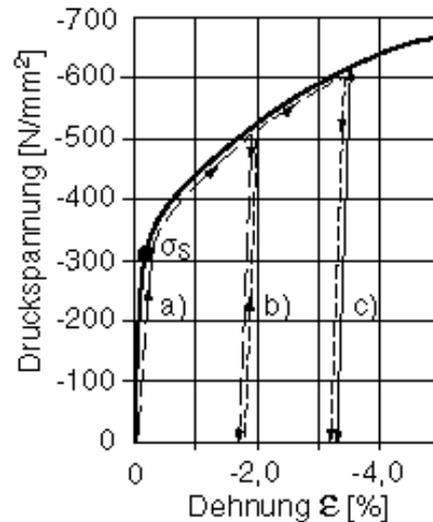


Bild 10: Spannungs-Dehnungsdiagramm des quasistatischen Druckversuchs für den Trommelwerkstoff GGG 40.3. Eingetragen ist der Vorgang des "Einfahrens" der Trommel infolge erstmaliger Belastung (a) und b)) und der dadurch vergrößerte elastische Bereich für die nachfolgenden Belastungen (c)).

- der unter der Umschnürung des Seilpaketes vorwiegend unter Druck belastete Trommelmantel auch bei plastischer Verformung bezüglich der Lastaufnahme durch die Seilwindungen keine Funktionsmängel aufweist,
- die extreme Verfestigungskurve im Druckbereich der verwendeten Werkstoffe (**Bild 10**) eine Anwendung des plastischen Bereichs empfehlen läßt, da sie nahezu eine Verdoppelung der Belastungsfähigkeit verspricht. Die gleichen Ergebnisse zeigen Schwingversuche im Druckbereich, so daß auch für den low-cycle-fatigue Fall die vorliegenden Aussagen angewendet werden können. In **Bild 10** eingezeichnet ist der Vorgang des "Einfahrens" eines Trommelmantels auf eine plastische Vorverformung, was nach der Erstbelastung eine Erhöhung des elastischen Bereichs für die Folgebelastungen verspricht.

Die Forderungen nach extremem Leichtbau von Hebezeugen, insbesondere im Fahrzeug- und Schiffsbau, führen zur konsequenten Ausnutzung dieses Werkstoffverhaltens, wobei sich erwiesen hat, daß eine plastische Rechnung der Beanspruchungen und Verformungen empfehlenswert ist /8/. Am Beispiel einer typischen Seiltrommelkonstruktion in **Bild 11** sei anhand von Schadensfällen aufgeführt, daß der Bereich großer plastischer Verfor-

mungen (Pos. A) in den meisten Fällen nicht die kritische Beanspruchung darstellt, sondern daß

- Schiefstellungen infolge plastischer Verformungen zu Lagerschäden führen oder Eingriffsstörungen des Antriebsstranges verursachen (Pos. B),
- Axialverformungen der Trommel zu Störungen der Lagerung beitragen (Pos. C),
- der Übergang der plastischen zu elastischen Verformungen im Bereich der Bordscheibenanschlüsse zu Vorspannungen führt, die die Kerbwirkung vergrößern können (Pos. D), und
- der Bereich der Endscheiben unzulässige Verformungen aufweisen kann, die den Bau- raum überschreiten. Am Beispiel einer Schiffswinde mit mehrlagiger Bewicklung konnte wegen zu großer Verformung der Bordscheiben die Last nicht mehr eingeholt werden. Im Falle von Bremscheiben bewirkt die Schiefstellung die Beeinträchtigung der Bremsfunktion (Pos. E).

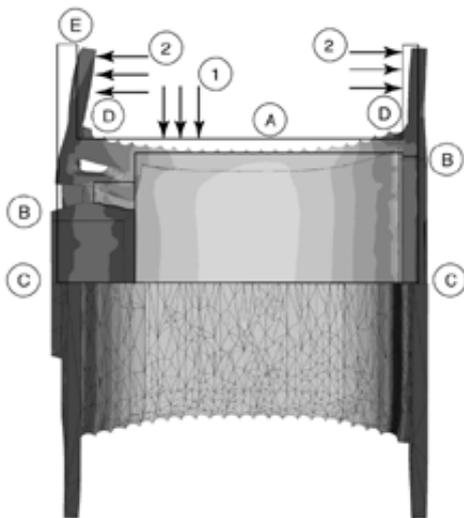


Bild 11: Seiltrommel, Beanspruchungs- und Verformungsverhalten anhand einer FE-Rechnung. Problemzonen: A Trommelmantel; B Lagerbereich infolge Radialverformung und Schiefstellung; C Einbaubegrenzung in axialer Richtung; D Kerbwirkungen im Bereich der Bordscheibenanschlüsse; E Endscheibenverformung bei mehrlagiger Bewicklung

Eine Optimierung der Trommeln ist aber bei Berechnung der Verformungen auch im plastischen Bereich durchaus möglich. **Bild 12** zeigt eine mit Hilfe der CAO-Technik /9/ berechnete ausgewogene Konstruktion unter Einbeziehung plastischer

Verformungen mit erheblicher Verringerung der Kerbwirkung im Bordscheiben-Anschlußbereich durch verformungsgerechte Gestaltung.



Bild 12: Optimierte Leichtbautrommel nach dem CAO-Verfahren

5 Ausgleichwirkung der teilplastischen Verformung bei Mehrfacheingriff

5.1 Beispiel Zahnwellen-Verbindung unter Torsionsbeanspruchung

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Fällen wird im folgenden Beispiel eine kontrollierte teilplastische Verformung bewußt eingesetzt, um einen Belastungsausgleich bei Mehrfacheingriffen zu erzielen, deren Übertragungsverhalten von Fertigungsabweichungen und den Verformungen unter Last stark abhängt. Das bekannteste Beispiel ist die überelastisch angezogene Schraubverbindung, bei der die Verformung der Schraubengänge einen Beitrag zur Lastverteilung leistet. Im folgenden sei als Beispiel die Zahnwellen-Verbindung gewählt, bei der infolge Verzahnungsabweichungen von Welle und Nabe und abhängig von der jeweiligen Einbaustellung sich eine ungleichförmige Lastaufteilung ergibt, wie sie **Bild 13** als Rechenergebnis im elastischen Bereich darstellt /10/.

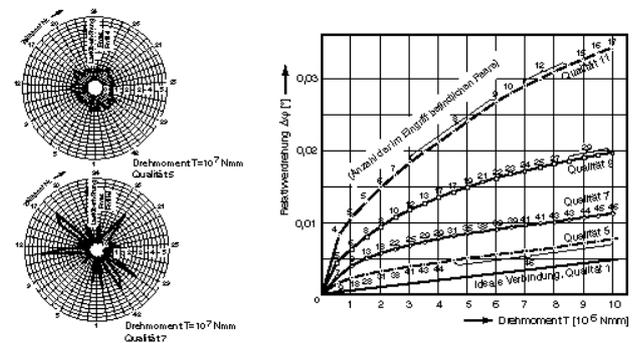


Bild 13: Lastaufteilung und Verdrehfederkennlinie einer durch reines Drehmoment belasteten Zahnwellen-Verbindung DIN 5480 - 95x2x30x42 in Abhängigkeit von der Herstellungsqualität. Elastischer Bereich.

Die Verzahnungsabweichungen bewirken, daß ein Teil der Zahnpaare erst bei hohen Lasten oder überhaupt nicht zum Eingriff kommen und dafür andere überlastet werden. Gleichzeitig zeigen Versuche, daß am Verbindungsende der Drehmomenteneinleitung die Beanspruchung am größten ist und daß infolge der Zahnfußausrundung eine erhebliche Kerbwirkung besteht. **Bild 14** stellt die Verteilung der Zahnfuß-Vergleichsspannung für eine Verbindung mit einem Längendurchmesser Verhältnis von $d_b = 0,5$ und einer sehr kurzen Nabe mit $b/d_b = 0,05$ dar /11, 12/.

Sowohl der Torsionseinfluß als auch der Einfluß der Biegebeanspruchung können zu einer plastischen Verformung im Zahnfuß der einzelnen Zähne führen, die beeinflusst werden kann durch die Wahl der Zahnform (Eingriffswinkel, Profilverschiebung, Zahnfußausrundung, Kopfhöhe usw.), **Bild 15**. Durch den relativ großen Querschnitt bis zur Durchplastizierung des Zahnfußes und damit zum Abscheren des Zahnes kann man einen Bereich der kontrollierten plastischen Dehnung definieren, bei dem die Zahnflanken eine Positionsänderung (Angleichung an die Gegenflanke) erfahren ohne die Übertragbarkeit der Zahnpaarung wesentlich zu beeinflussen (**Bild 16**). Da die Zahnkörper gegenüber dem Wellenkörper (Fußkreiszyylinder) eine wesentlich größere Verformbarkeit aufweisen, erfolgt - über der Länge der Verbindung gesehen - diese Angleichung im Bereich hoher Drehmomente stärker als am lastfreien Ende der Verbindung.

Der Vorgang der Angleichung soll an einem Versuchsbeispiel erläutert werden /11/: Die Prüfzahnwelle DIN 5480 - 45x2x30x21 IT8 aus dem Werkstoff 25MoCr4 ($R_e = 350 \text{ N/mm}^2$, $R_m = 535 \text{ N/mm}^2$, Bruchdehnung 30%) (**Bild 17**), zeigt in einer elastisch-plastischen Berechnung mit Werkstoffverfestigung gemäß Glg. (3) nach gemessenem Zugdiagramm folgende markanten Grenzen auf:

Beginn des plastischen Fließens am Zahnfuß (bei IT8) $T_{sg} = 390 \text{ Nm}$.

Beginn des plastischen Fließens am Zahnfuß (bei IT1/fehlerfrei) $T_{s1} = 1160 \text{ Nm}$.

Das heißt, daß im Moment des plastischen Fließens bei fehlerfreier Verzahnung der zuletzt belastete Zahn die Streckgrenze erreicht hat und alle anderen Zähne bereits plastisch geflossen sind. Durch plastisches Fließen um $36 \mu\text{m}$ entsprechend der nach DIN 3962 bestimmten Teilungs-Gesamtabweichung an dem Zahnpaar mit der größten Gesamtabweichung ist die durch die Fertigungs-

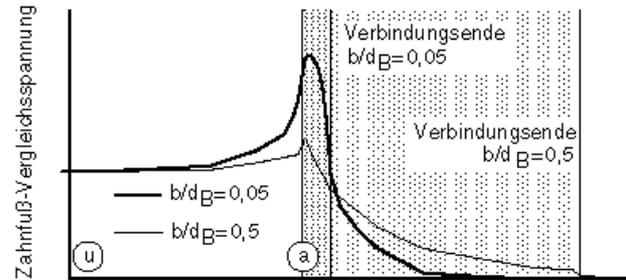


Bild 14: Wellenzahnfuß-Vergleichsspannung (Zugseite des Zahns) bei Beanspruchung durch Torsion und Zahnbiegung in einer Zahnwelle bei verschiedenen langen Naben. u = Welle unter Torsion außerhalb des Nabenbereichs; a = Nabenanfang, belastete Seite.



Bild 15: Ausbildung der plastischen Zonen eines überelastisch beanspruchten Wellenzahns bei gleicher Zahn-Normalkraft in Abhängigkeit von der Zahnform. Verzahnung nach DIN 5480, $z = 6$. a) Profilverschiebung mit mittlerem Flankendruckwinkel $\alpha = 24^\circ$; b) Profilverschiebung mit mittlerem Flankendruckwinkel $\alpha = 27^\circ$.

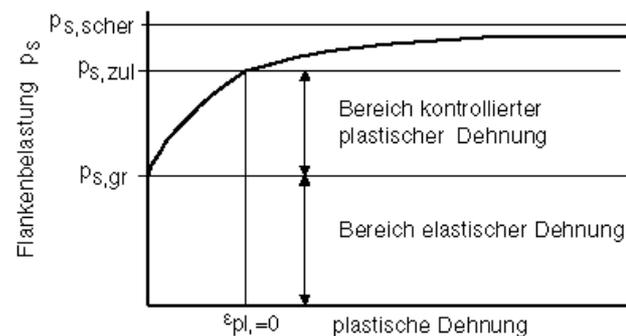


Bild 16: Grundsätzlicher Verlauf der plastischen Dehnung im Zahnfuß einer Zahnwellenpaarung bei Überschreiten der Elastizitätsgrenze.

fehler bedingte ungleichmäßige Lastaufteilung durch plastisches Fließen der einzelnen Zahnpaare ausgeglichen und die Zahnpaare weisen nach Entlastung ein für alle Zahnpaare gleiches Spiel in Belastungsrichtung auf (Achtung: Dies gilt natürlich nur für die Einbaustellung, in der die Last aufgebracht wurde!). Die entsprechenden plastischen

Dehnungen betragen bei diesem durch eine ausgeprägte Streckgrenze gekennzeichneten Werkstoff (**Bild 17**) bei Überschreiten der Streckgrenze in allen Paarungen mindestens $\varepsilon_s = 2\%$ der im Verfestigungsbereich liegende Zuwachs an plastischer Dehnung im Zahnfuß der maximal belasteten Paarung kann mit 0,05% abgeschätzt werden /11/.

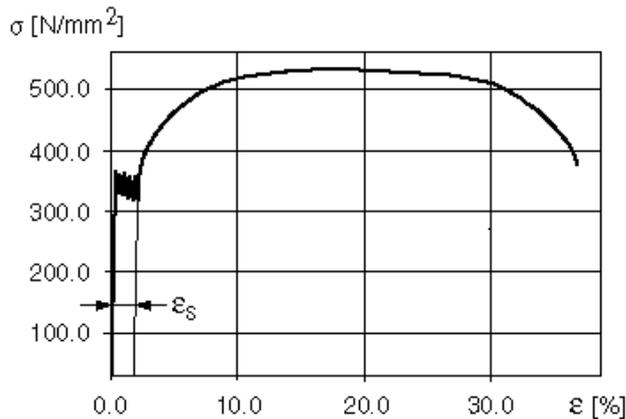


Bild 17: Spannungs-Dehnungs-Diagramm aus Zugversuch. Rundprobe DIN 50125. Werkstoff 25MoCr4 /8/

Angesichts der hohen Bruchdehnung bietet sich hier eine hervorragende Möglichkeit, durch ein "Trainieren" der Verbindung, also ein Überlasten in den teilplastischen Bereich hinein, Fertigungsfehler auszugleichen und damit erhebliche Kosten zu sparen. Der Einfluß des Trainierens auf die Dauerfestigkeit der Verbindung ist Gegenstand aktueller Forschung.

Bild 18 zeigt die Zahnflankenverschiebungen der Prüfpaarung nach einem Verdrehversuch bis zur Zerstörung. Das im Versuch maximal ertragbare Drehmoment lag beim Zehnfachen der elastischen Rechnung, die bleibenden Zahnflankenverschiebungen übersteigen die Fertigungsabweichungen ebenfalls bei weitem und zeigen zudem ihre höchsten Werte in den Verdrehungen außerhalb des Verbindungsbereichs, so daß das beschriebene Verfahren einer Angleichung der Fertigungsfehler durch bewußte Überlastung in den teilplastischen Bereich hinein für die Tragfähigkeit der Verbindung keine Nachteile hat. Die in /11/ durchgeführten Rechnungen und Experimente ergaben eine hervorragende Übereinstimmung, so daß man auch von einer zuverlässigen theoretischen Bestimmung dieses Vorgangs ausgehen kann.

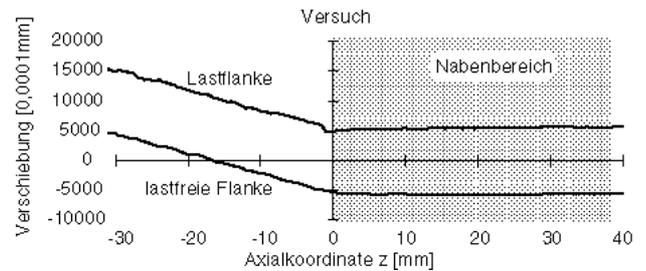


Bild 18: Zahnflankenverschiebungen nach Entlastung aus einem Verdrehversuch bis zur Zerstörung. Zahnwelle DIN 5480 - W 45x2x30x21 aus 25MoCr4, Drehmoment bei Zerstörung $T = 3900$ Nm.

6 Zusammenfassung

Die beanspruchungsgerechte Gestaltung von Maschinenteilen unter extremen Leichtbaubedingungen bedeutet in vielen Fällen eine bewußte Ausnutzung des plastischen Verhaltens der Konstruktionswerkstoffe. Nur in seltenen Fällen kann der Konstrukteur dabei auf bestehende Speziallösungen zurückgreifen, bei denen eine zulässige teilplastische Verformung für sein spezielles Bauteil unter definierter Belastung angegeben ist. An einigen charakteristischen Bauteilen des Maschinenbaus werden Grenzbedingungen erläutert:

- Überschreiten der Beanspruchbarkeit durch teilplastische Verformung bis in den Bereich einer maximal möglichen plastischen Dehnung hinein. Die Bauteilverformungen spielen hierbei nur eine untergeordnete Rolle. Am Beispiel der Bolzen-Lasche-Verbindung wurden einfache zweidimensionale Beanspruchungszustände im Hinblick auf eine Empfindlichkeit gegenüber der Überschreitung der Elastizitätsgrenze betrachtet. Es sind Laststeigerungsraten um 50% bei Ausnutzung teilplastischer Verformungen zu erwarten.
- Aufhebung der Steifigkeit von Maschinenbauteilen und deren Verbindungen durch teilplastische Verformungen, im wesentlichen bei Kraftschlußverbindungen. Am Beispiel von Preßverbindungen mit konstruktiven Störungen wurde gezeigt, daß in einem weiten Bereich teilplastischer Verformungen das Verformungsverhalten der Maschinenteile und damit auch die Grundgleichungen der elastischen Spannungsverformung sich im teilplastischen Bereich nicht wesentlich ändern. Bei den gezeigten Fällen ist eine Erhöhung der Tragfähigkeit durch Ausnutzen des teilplastischen Verformungsbereichs um 50% durchaus möglich.

- Beherrschung der zum Teil erheblichen Verformungen im plastischen Bereich und deren Auswirkung auf die konstruktiven Randbedingungen der Konstruktion. Das Beispiel der mehrlagig bewickelten Seiltrommeln zeigt Belastungssteigerungen von mindestens 50% gegenüber dem elastischen Verformungsbereich durch die Verfestigung der Maschinenbauwerkstoffe insbesondere im Druckbereich. Der bewußte Einsatz von plastischen Verformungen zur Leistungssteigerung erfordert aber eine sorgfältige Berechnung der in der Maschinenstruktur herrschenden Verformungen und deren Grenzbedingungen.
- Im Bereich der Mehrfacheingriffe mit Kopplung von Verformung, Fertigungsabweichungen und Belastungen können teilplastische Verformungen zum Ausgleich und zur Verstetigung von Belastungen eingesetzt werden. Am Beispiel einer Zahnwellen-Verbindung wurde gezeigt, daß eine zum Ausgleich von Fertigungsabweichungen vorgenommene Vorverformung ("Trainieren") der Verbindung im Bereich der zulässigen Verformungen der meisten Maschinenbauwerkstoffe liegt und durch den o.a. Vorgang sich wesentliche Fertigungskosten einsparen lassen. Auch hier sind - abhängig von Lasteinleitung und Fertigungsabweichungen - Tragfähigkeitssteigerungen über 20% nicht ungewöhnlich.

Bei einer elastisch-plastischen Auslegung sind die kontinuumsmechanischen Grundlagen komplizierter als bei einer rein elastischen. Damit wachsen auch die zu überwindenden mathematischen Schwierigkeiten. Geschlossen lösbare Differentialgleichungen sind bisher nur für einfachste Geometrien (z.B. /2, 4/) möglich, die von /1/ und /3/ angestellten Überlegungen beziehen sich vorwiegend auf die Behandlung des Kerbproblems. Die heute verfügbaren FEM-Programme erlauben aber eine hinreichend zuverlässige Vorherbestimmung des teilplastischen oder plastischen Spannungs- und Verformungszustandes, so daß eine gezielte konstruktive Gestaltung von Maschinenstrukturen unter Ausnutzung des überelastischen Materialverhaltens zum Stand der Technik gehören könnte. Eine konstruktionssystematische Aufbereitung der bisherigen Erkenntnisse über charakteristische Kriterien und eine Weiterentwicklung der Vorgehensweisen anhand von Analogiebetrachtungen und Konstruktionsregeln könnte Gegenstand künftiger konstruktionsmethodischer Forschung sein.

7 Literatur

- /1/ Sähn, S. und Göldner, H.: Bruch- und Beurteilungskriterien in der Festigkeitslehre. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1989
- /2/ Lippmann, H.: Mechanik des plastischen Fließens. Springer Verlag 1981
- /3/ Neuber, H.: Kerbspannungslehre. Theorie der Spannungskonzentration. Genaue Berechnung der Festigkeit. Springer Verlag 1985
- /4/ Kollmann, F.G.: Welle-Nabe-Verbindungen. Gestaltung, Berechnung, Auswahl. Springer Verlag 1984
- /5/ Önöz, E.: Die Auslegung elastisch-plastisch beanspruchter Querpreßverbände unter Berücksichtigung der Werkstoffverfestigung. Fortschr.Ber. VDI-Z., Reihe 1, Nr. 108 (1983)
- /6/ Rothe, F.: Spielbehaftete Laschenverbindungen bei quasistatischer Belastung unter der Berücksichtigung nichtlinearer Randbedingungen. Diss. TU Clausthal 1994
- /7/ Li, T.: Beanspruchungen und Übertragungsfähigkeit der geschwächten Welle-Nabe-Verbindung im elastischen und teilplastischen Bereich. Diss. TU Clausthal 1993
- /8/ Dietz, P.: Ein Verfahren zur Berechnung ein- und mehrlagig bewickelter Seiltrommeln. Fortschrittsberichte VDI-Z, Reihe Fördertechnik, Nr. 12
- /9/ Mattheck, C.: Design in der Natur. Der Baum als Lehrmeister. Rombach GmbH+Co Verlagshaus KG, Freiburg im Breisgau, 1993
- /10/ Dietz, P.: Die Berechnung von Zahn- und Keilwellenverbindungen. Selbstverlag des Verfassers, Büttelborn 1978
- /11/ Wesolowski, K.: Dreidimensionale Beanspruchungszustände und Festigkeitsnachweis drehmomentbelasteter Zahnwellenverbindungen unter elastischer und teilplastischer Verformung. Diss. TU Clausthal 1996
- /12/ Villmer, F.-J.: Zum Mechanismus der Lastverteilung in Zahnwellenverbindungen. Diss. TU Clausthal 1984