

Ein Vorschlag für ein globales Mehrachsigenkriterium für keramische Werkstoffe auf Basis gewichteter Verzerrungen

Jakel, R.

Die Beurteilung des schädigenden Einflusses mehrachsiger Spannungszustände ist für die praktische Auslegung von Bauteilen aus keramischen Werkstoffen von großer Bedeutung. Mit sogenannten globalen Mehrachsigenkriterien, die sich auf allgemeine mechanische Überlegungen stützen, kann das Verhalten dieser Werkstoffe meist nicht befriedigend erfaßt werden. Dem Konstrukteur bleibt daher nur der Weg, sich bruchmechanischer Versagenskriterien zu bedienen. Dies bedeutet allerdings mehrere Versuchsreihen zur Bestimmung bruchmechanischer Werkstoffkennwerte sowie erheblichen mathematischen Aufwand. Mit der im folgenden beschriebenen Hypothese soll der Versuch unternommen werden, mittels einfach bestimmbarer semiempirischer Konstanten und elementarer mathematischer Methoden ein für die praktische Anwendung hinreichend genaues Mehrachsigenkriterium bereitzustellen.

1. Einleitung

Während das Verhalten metallischer Werkstoffe recht gut mittels gängiger Mehrachsigenkriterien beschreibbar ist, zeigen keramische Werkstoffe ein gegenüber Stahl völlig abweichendes Versagensverhalten. Auswertungen von Versuchen aus der Literatur zeigen, daß mit einem Versagenskriterium für diese Werkstoffe grundsätzlich mindestens folgende Beobachtungen erklärbar sein müssen:

- a) Die (einachsige) Druckfestigkeit ist höher als die Zugfestigkeit, aber nicht unendlich hoch.
- b) Das gemessene Verhältnis von Zug- zur Druckfestigkeit schwankt von etwa 1:3 bis 1:20
- c) Im Falle isostatischer Druckbeanspruchung ist kein Bruch möglich.
- d) Bei nichtisostatischer Druckbeanspruchung tritt Versagen auf.
- e) Bei iso- wie nichtisostatischer Zugbeanspruchung versagt der Werkstoff.
- f) Das Werkstoffverhalten ist sprödelastisch.

- g) Die äquibiaxial ertragbare Zugbeanspruchung ist, je nach Veröffentlichung, offensichtlich größer, gleichgroß oder kleiner als die uniaxial ertragbare.

Diese umfangreichen Beobachtungen zeigen, wie komplex das Problem der Mehrachsigenkeit bei Keramik ist. Besonders die Beobachtungen b) und g) machen deutlich, daß mittels der gewöhnlich in globalen Mehrachsigenkriterien verwendeten und experimentell einfach bestimmbar Kennwerte σ_{zug} (Zugfestigkeit), E (Elastizitätsmodul), ν (Querkontraktionszahl) sowie ggf. noch der Druckfestigkeit σ_{druck} bei weitem nicht alle spezifischen Eigenschaften beschrieben werden können. Es liegt daher der Gedanke nahe, zusätzliche Konstanten einzuführen, die es erlauben, ein genaueres und auf den jeweiligen keramischen Werkstoff abgestimmtes Versagen zu beschreiben. Solche Konstanten dürfen aber nicht rein willkürlich gewählt werden, sondern müssen mindestens „semiempirischer“ Natur sein, d. h., ihr Einfluß muß durch experimentelle Beobachtungen untermauert werden.

2. Globale Mehrachsigenkriterien

Um den Leser in die Thematik globaler Mehrachsigenkriterien einzuführen, sollen im folgenden einige geläufige Kriterien kurz vorgestellt und ihre Eignung für keramische Werkstoffe diskutiert werden.

Am weitesten verbreitet ist die Hypothese der Gestaltänderungsenergie nach von Mises. Die Gleichung lautet:

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

Bedingt durch die Hauptspannungsdifferenzen wird bei isostatischem Druck wie bei isostatischem Zug kein Bruch vorhergesagt. Ferner sind einachsige Zug- wie Druckbeanspruchbarkeit gleich groß (im σ_1/σ_2 -Diagramm, **Bild 1**, ergibt sich eine um 45° ge-

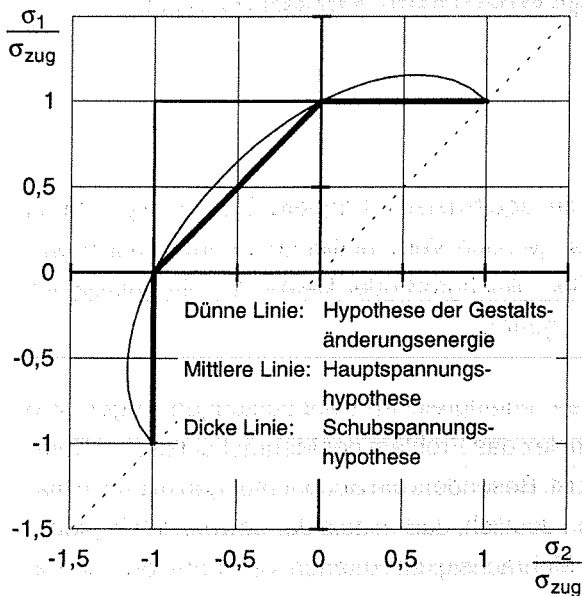


Bild 1: Hauptspannungs-, Gestaltsänderungsenergie- und Schubspannungshypothese für den ebenen Spannungszustand

neigte Ellipse, die durch die einachsigen Zugfestigkeiten läuft), so daß dieses Kriterium völlig ungeeignet für Keramiken ist. Ähnlich dem Mises-Kriterium geht das Schubspannungskriterium von Hauptspannungsdifferenzen als Versagensursache aus, allerdings ist dieses Kriterium das „schärfere“ (Bild 1). Ansonsten hat es dieselben für Keramik nicht zutreffenden Merkmale.

Ein weiteres Kriterium ist das der maximalen Hauptspannung, d.h., die maximal im Werkstoff auftretende Hauptspannung führt unabhängig von der Höhe der anderen zum Versagen. Im σ_1/σ_2 -Diagramm ergibt sich daher ein Quadrat (Bild 1). Bei diesem Kriterium wird zwar bei isostatischem Zug ein Versagen berechnet, jedoch auch bei isostatischem Druck. Außerdem wird zwischen Zug- und Druckfestigkeit nicht unterschieden. In der Literatur wird daher oft angenommen, daß nur positive Hauptspannungen ein Versagen herbeiführen, was allerdings eine unendlich hohe ertragbare Druckspannung zur Folge hat. Zur Beseitigung dieses Mangels kann man in einer modifizierten Hauptspannungshypothese für den Druckbereich statt der ertragbaren Zugspannung die einachsig ertragbare gemessene Druckspannung setzen. Es ergibt sich wiederum ein Quadrat im σ_1/σ_2 -Diagramm (**Bild 2**), dessen Mittelpunkt aber im dritten Quadranten liegt. Bei isostati-

ischem Druck versagt der Werkstoff, was nicht der Realität entspricht.

Bei der Mohrschen Hypothese dient eine Funktion $\tau=f(\sigma)$ als Bruchkriterium, das im Gegensatz zum Mises-Kriterium vom hydrostatischen Spannungszustand abhängt. Der Werkstoff verträgt unter Druck höhere Spannungen als unter Zug. Für den zweiachsigen Beanspruchungszustand ergibt sich die in Bild 2 dargestellte Hüllkurve, die als Näherung für keramische Werkstoffe brauchbar ist. Bei hydrostatischer Druckbeanspruchung wird jedoch Versagen ermittelt.

Die Sandelsche Hypothese /1/ sagt aus, daß Versagen bei einem kritischen Wert des maximalen Hauptdehnungsvektors

$$\epsilon_{\text{res}} = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2}$$

auftritt. Es ergibt sich für den zweiachsigen Spannungszustand eine Ellipse ähnlich dem Mises-Kriterium, wobei die Längen der Halbachsen eine Funktion der Querkontraktionszahl sind. Da kein Unterschied zwischen zweiachsigem Zug- und Druckbereich gemacht wird, ist diese zur Beschreibung des keramischen Versagensverhaltens völlig ungeeignet.

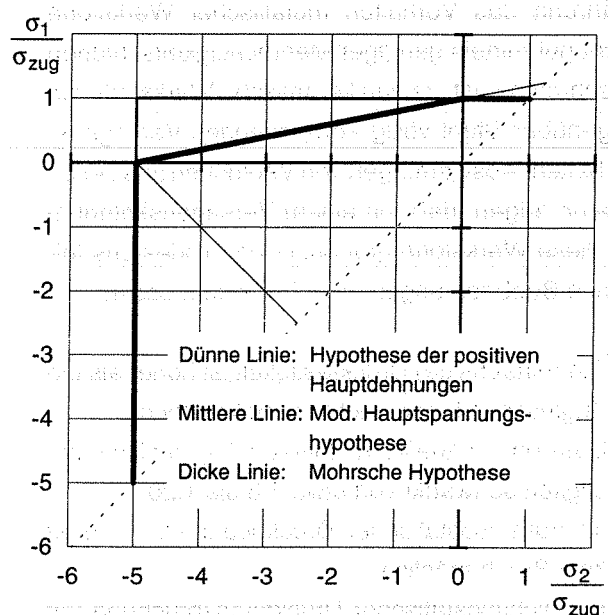


Bild 2: Modifizierte Hauptspannungs- und Mohrsche Hypothese im Fall des ebenen Spannungszustands für $\sigma_{\text{druck}}/\sigma_{\text{zug}}=5$ sowie Hypothese der positiven Hauptdehnungen für $\nu=0,2$

Die Bruchhypothese von Kuhn postuliert, daß bei Erreichen einer kritischen Formänderungsenergie als Summe von Gestalt- und Volumenänderungsenergie Bruch auftritt. Um bei isostatischem Druck kein Versagen zu erhalten, wird bei Volumenverkleinerung eine Vorzeichenkonvention eingeführt (negative Volumenänderungsenergie). Im zweiachsigen Fall wird jedoch das zu erwartende große Verhältnis zwischen ertragbarer Druck- und Zugspannung viel zu klein vorhergesagt; so ist z.B. für $\nu=0,2$ $\sigma_{\text{druck}}/\sigma_{\text{zug}}=1,3/1/$.

Die Hypothese der positiven Hauptdehnungen /2/ besagt, daß nur positive auftretende Hauptdehnungen ein Versagen des Werkstoffes herbeiführen können. Entsprechend dem Hookeschen Gesetz erhält man die drei Vergleichsspannungen aus den Gleichungen

$$\sigma_{V1} = E \cdot \varepsilon_1 = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{V2} = E \cdot \varepsilon_2 = \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{V3} = E \cdot \varepsilon_3 = \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Jede dieser Vergleichsspannungen trägt bei statistischer Betrachtung zum Versagen des Werkstoffes bei, worauf im 6. Abschnitt noch eingegangen wird. Ohne Berücksichtigung der Festigkeitsstreuung ist nur die maximal auftretende positive Vergleichsspannung für das Versagen verantwortlich (entspricht der Hauptdehnungshypothese). Für das Verhältnis von einachsiger Zug- zu Druckfestigkeit ergibt sich dann, weil die senkrecht zur negativen Hauptdehnung stehenden positiven Querdehnungen das Versagen verursachen:

$$\frac{\sigma_{\text{zug}}}{\sigma_{\text{druck}}} = \nu$$

Für den ebenen Spannungszustand und $\nu=0,2$ ergibt sich das in Bild 2 dargestellte Dreieck, zum Vergleich ist die Mohrsche Hypothese mit $\sigma_{\text{druck}}/\sigma_{\text{zug}}=5$ eingetragen. Interessant ist, daß für den äquibiaxialen Zug eine gegenüber uniaxialer Beanspruchung höhere und für den äquibiaxialen Druck eine geringere ertragbare Spannung vorhergesagt wird. Für äquibiaxialen Zug (Plattenbiegung) kann /2/ eine Übereinstimmung mit dieser Vorhersage nachweisen, im zweiachsigen Druckbereich wurden leider keine Experimente durchgeführt.

Für isostatischen Druck kann ein Versagen nicht auftreten, da dann keine positiven Hauptdehnungen im Werkstoff anzutreffen sind. Bis auf die Beobachtungen b) und g) werden von dieser Hypothese als einziger alle aufgelisteten hinreichend gut erfüllt.

3. Bruchmechanische Kriterien

Bei bruchmechanischen Mehrachsigenkriterien geht man im Gegensatz zu den globalen vom Verhalten der bruchauslösenden Fehler (Poren, Risse) im Werkstoff aus. Grundlegende Beziehungen sind dabei die Gleichungen für die Spannungsintensitätsfaktoren K der drei Bruchmodi:

$$K_I = \sigma_n \cdot \sqrt{a} \cdot Y_I$$

$$K_{II} = \tau \cdot \sqrt{a} \cdot Y_{II}$$

$$K_{III} = \tau \cdot \sqrt{a} \cdot Y_{III}$$

Hierin sind σ und τ charakteristische Spannungen der rißfreien Komponente, a die Rißlänge und Y ein Geometriefaktor eines Rißmodelles. Versagen tritt auf, wenn der Spannungsintensitätsfaktor K einen werkstoffspezifischen kritischen Wert K_c überschreitet. Wie aus den Gleichungen ersichtlich, hängt das Versagen auch von der Wahl eines Rißmodells ab.

Ein beliebig orientierter Riß erfährt i. a. selbst bei einachsigem Spannungszustand eine mehrmodale Beanspruchung. Es ist notwendig, ein Kriterium zu definieren, mit dem ein mehrmodaler Beanspruchungsfall in einen einmodalen umgerechnet werden kann, also eine Gleichung der Form

$$K_{Ieq} = f(K_I, K_{II}, K_{III})$$

bereitzustellen. Durch Einsetzen der bruchmechanischen Grundgleichungen in dieses lokale Mehrachsigenkriterium wird die unbekannte Rißlänge a eliminiert.

In der Literatur gibt es zahlreiche Ansätze für lokale Versagenskriterien. Exemplarisch sei hier nur das empirische Kriterium nach Richard genannt, das sich durch entsprechende Konstanten u und v besonders gut an Versuche anpassen läßt /3/. Viele andere Kriterien sind mangels solcher Konstanten

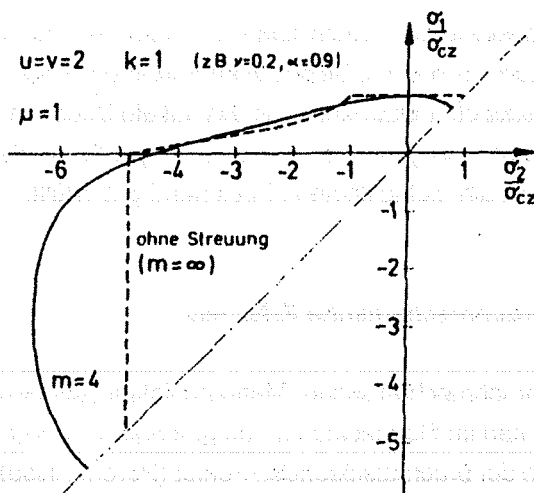


Bild 3: Versagensdiagramm für kreisförmige Risse bei statistischer Betrachtung nach /1/;
 $\alpha = K_{Ic}/K_{IIc}$; $k = (2\alpha/(2-\nu))^{\nu}$

wesentlich „starrer“ in ihrer Aussage und ergeben daher Vorhersagen wechselnder Qualität.

Ist die Normalspannung auf der Rißfläche negativ, so muß man verschiedene Annahmen treffen, da die Rißufer nun unter Druckspannungen stehen. So gibt /1/ folgende Vorschläge: a) Kein Versagen möglich; b) $K_I=0$ und Berücksichtigung von K_{II} oder c) $K_I=0$ und Annahme einer Reibkraft; das heißt, man ersetzt die Schubspannung durch eine effektive Schubspannung, die zusätzlich von der Reibungszahl μ und der Druckspannung auf der Bruchfläche abhängt. Ein Beispiel eines σ_1/σ_2 -Diagramms eines bruchmechanischen Versagenskriteriums zeigt **Bild 3**. Paradox ist, daß ein Werkstoff mit einem niedrigeren Weibullmodul, also ein schlechterer Werkstoff, im Druckbereich eine höhere Festigkeit aufweist als der entsprechende „zuverlässige“ Werkstoff.

Zusammenfassend kann dennoch gesagt werden, daß durch die Vielzahl an beeinflussenden veränderlichen Größen (Rißmodell, lokales Versagenskriterium mit empirischen Konstanten und Reibzahl) eine sehr viel bessere Beschreibung des Versagensverhaltens keramischer Werkstoffe als bei den globalen Kriterien möglich ist. Allerdings wird dies durch erheblichen mathematischen Aufwand (Bestimmung der Versagensbedingungen bzw. Auswahl eines Rißmodells für Y_I , Y_{II} und ggf. Y_{III}) und viele zusätzliche Versuche zur Bestimmung von

Werkstoff- (K_{Ic} , K_{IIc} , K_{IIIc}) bzw. empirischen Größen (u, v, μ) neben den ohnehin erforderlichen Kennwerten E, ν sowie der Größen zur statistischen Beschreibung (z. B. Weibullmodul) erkaufte. Bindet man die bruchmechanischen Versagenskriterien in die statistische Festigkeitstheorie nach Weibull ein, so muß ein Fünffachintegral gelöst werden, da nicht nur eine Integration über die drei Raumkoordinaten x, y und z , sondern auch über zwei Winkelkoordinaten der Einheitskugel erforderlich ist, um alle Rißorientierungen zu erfassen /1/. Auch mit Unterstützung eines Rechners bedeutet dies erheblichen Aufwand.

4. Vorstellung des Ansatzes für das neue Mehrachsigenkriterium

Untersuchungen zahlreicher Autoren (einige davon zusammengefaßt in /1/ und /2/) zeigen extrem uneinheitliches Verhalten. Während z. B. von /2/ bei zweiachsiger Beanspruchung gegenüber einachsiger geringere Ausfallwahrscheinlichkeiten beobachtet werden, ergeben sich bei Untersuchungen anderer Autoren oft höhere. Grundsätzlich kann man zwar höhere Ausfallwahrscheinlichkeiten für den einachsigen Fall auf einen Fehler im Versuch zurückführen: Bedingt durch Oberflächenfehler an den Kanten von Drei- oder Vierpunktbiegestäbchen könnte gegenüber biaxialen Versuchen (z. B. Doppelring oder Plattenbiegung) eine zu geringe Festigkeit gemessen werden, weil bei letzteren solche Kanten nicht beansprucht werden. Dieser Fehler ist bei /2/ aber praktisch auszuschließen, weil auch kombinierte Biege-/Torsionsversuche an Rundstäben durchgeführt worden sind, die mit wachsendem Biegeanteil auf den Versuchspunkt für den reinen Biegeversuch zustreben.

Neben den erwähnten Abweichung im ersten Quadranten zeigt sich auch im zweiten bzw. dritten Quadranten des σ_1/σ_2 -Diagramms kein einheitliches Bild (**Bild 4**). Beim Betrachten dieser Versuchspunkte scheint es fast unmöglich zu sein, eine befriedigende mathematische Beschreibung zu finden. Ziel des hier vorgestellten Kriteriums soll es sein, neben den grundsätzlich vorgestellten Forde-

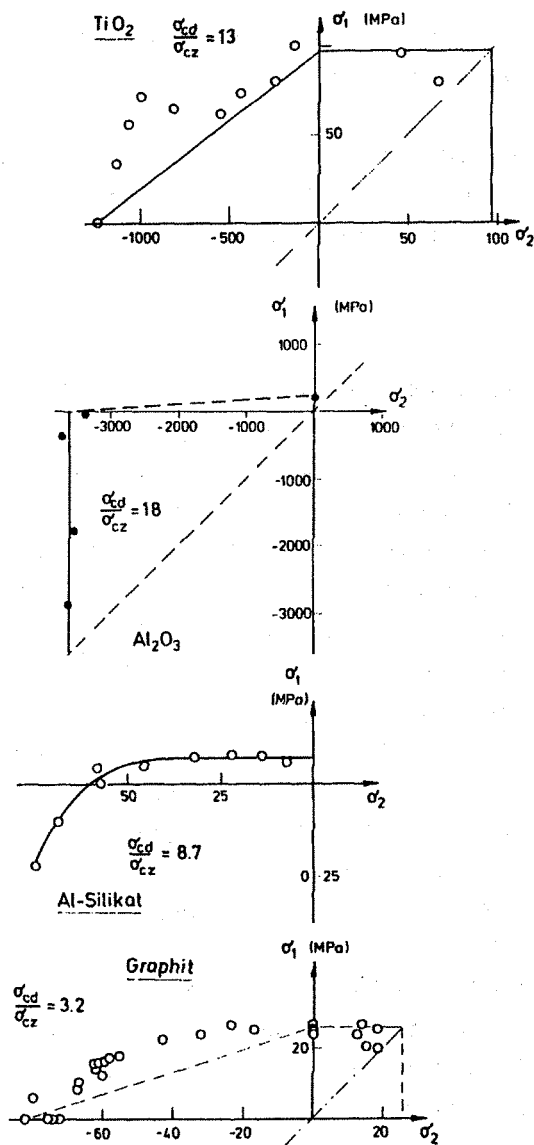


Bild 4: Mehrachsigidigramme verschiedener Werkstoffe; Ergebnisse unterschiedlicher Autoren, zusammengefaßt von /1/

rungen vor allen eine gute Anpaßbarkeit im 1. oder 3. Quadranten zu erreichen und zumindest die einachsige Druckfestigkeit gut zu erfassen. Dies wird für nötig gehalten, weil durch diese Spannungszustände in praktisch ausgeführten Konstruktionen meist der entscheidende Einfluß auf die Ausfallwahrscheinlichkeit bestimmt wird. Im 2. (bzw. 4.) Quadranten ist eine etwa geradlinige Verbindung zwischen einachsigem Zug und einachsigem Druck als konservative Näherung sicher ausreichend. Das Kriterium soll weiterhin auch für isostatische Spannungszustände richtige Aussagen liefern können.

Im zweiten Absatz wurde gezeigt, daß die meisten

der in der Einleitung aufgelisteten Beobachtungen nur mittels der Hypothese der positiven Hauptdehnungen zu erfüllen sind. Um jedoch das real sehr uneinheitliche Verhalten keramischer Werkstoffe quantitativ besser erfassen zu können, müssen zusätzliche Einflüsse berücksichtigt werden. In /4/ wird angeregt, den Einfluß von Schiebungen zu berücksichtigen, da in Versuchen an Keramik bei bestimmten Spannungszuständen Brüche beobachtet werden konnten, die auf einen Schubeinfluß deuten. Solche Beobachtungen sollen später noch angesprochen werden. An dieser Stelle sei zunächst lediglich bemerkt, daß das im folgenden vorgestellte Kriterium auf der zusätzlichen Wichtung von Schiebungen beruht.

Die drei Vergleichsspannungen nach der Hypothese der positiven Hauptdehnungen ergeben sich aus den Hauptdehnungen ϵ_i und dem Elastizitätsmodul. Man kann nun annehmen, daß die auf jeder Hauptdehnung senkrecht stehende Hauptschiebung zusätzlich schädigt, dieser Einfluß allerdings werkstoffabhängig ist, also eine Werkstoffkonstante darstellt. Dieser Ansatz ist deswegen sinnvoll, weil für den einachsigen Spannungszustand die senkrecht auf der positiven Hauptdehnung stehende Schiebung immer null ist und daher keine Funktion eines empirisch zu bestimmenden Wichtungsfaktors darstellt (**Bild 5**). Auf die praktische Bedeutung dieser

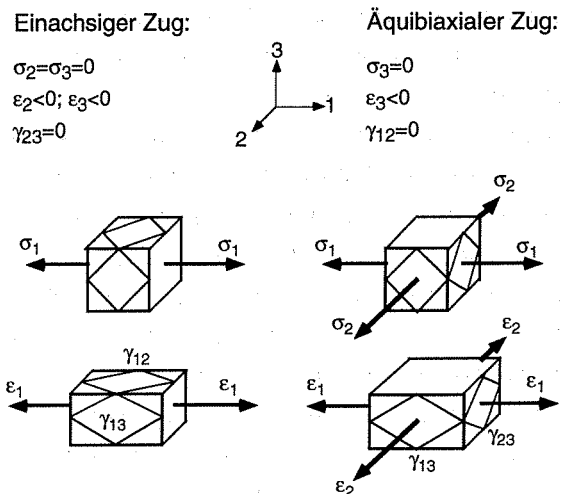


Bild 5: Verzerrungen am Elementarquader für den einachsigen und äquibiaxialen Zug

zunächst rein formalistisch erscheinenden Begründung soll im 5. Absatz noch eingegangen werden. Wählt man weiterhin einen besonders einfachen additiven Ansatz, so kann man folgende Gleichungen aufstellen:

$$\sigma_{V1} = E \cdot \varepsilon_1 + \alpha \cdot G \cdot \gamma_{23}$$

$$\sigma_{V2} = E \cdot \varepsilon_2 + \alpha \cdot G \cdot \gamma_{13}$$

$$\sigma_{V3} = E \cdot \varepsilon_3 + \alpha \cdot G \cdot \gamma_{12}$$

Hierin stellt α einen empirisch zu bestimmenden Wichtungsfaktor dar; $\alpha=0$ bedeutet einen Schubunempfindlichen Werkstoff. Mittels der Beziehung für z.B. die erste Hauptschubspannung

$$\tau_{12} = G \cdot \gamma_{12} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$$

ergeben sich dann die drei modifizierten Vergleichsspannungen:

$$\sigma_{V1} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) + \alpha \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}$$

$$\sigma_{V2} = \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) + \alpha \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}$$

$$\sigma_{V3} = \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) + \alpha \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$$

Die maximale positive Vergleichsspannung führt ohne Berücksichtigung der statistischen Festigkeitsstreuung zum Versagen. Für $\alpha=0$ ergibt sich so die Hypothese der positiven Hauptdehnungen. $\alpha=2\nu$ entspricht für den zweiachsigen Spannungszustand genau der Mohrschen Hypothese für den Fall $\sigma_{\text{zug}}/\sigma_{\text{druck}}=2\nu$ (**Bild 6**). Für den hydrostatischen Spannungszustand ergibt sich im Gegensatz zur Mohrschen Hypothese jedoch kein Versagen, da weder positive Hauptdehnungen noch Schiebungen auftreten. Bei isostatischem Zug tritt Versagen auf. Für $\alpha>2\nu$ verträgt der Werkstoff bei biaxialer Zugbelastung geringere und bei biaxialer Druckbelastung höhere Beanspruchungen als für den jeweiligen einachsigen Fall. Theoretischer Grenzfall ist $\alpha=2(1+\nu)$, weil sonst der einachsige Spannungszustand nicht mehr erfaßt werden kann. Wie im 6. Absatz noch gezeigt werden wird, ist der einachsige Spannungszustand bei statistischer Betrachtung bereits für $\alpha>2\nu$ nicht mehr exakt beschreibbar, so daß dann streng genommen die Einschränkung $0 \leq \alpha \leq 2\nu$ gemacht werden muß.

5. Diskussion und Erweiterung des vorgeschlagenen Ansatzes

Ohne Berücksichtigung der Festigkeitsstreuung ergibt sich aus den Definitionsgleichungen der drei Vergleichsspannungen die Beziehung

$$\frac{\sigma_{\text{zug}}}{\sigma_{\text{druck}}} = \nu + \frac{\alpha}{2}$$

Für schubunempfindliche Werkstoffe ($\alpha=0$) wäre dann das Verhältnis von einachsiger Zug- zu Druckspannung gleich ν analog der Hypothese der positiven Hauptdehnungen. Oftmals mißt man jedoch größere Druckfestigkeiten. /2/ erklärt dies durch die Behinderung der Querdehnung beim einachsigen Druckversuch, so daß sich zu große gemessene Druckfestigkeiten ergeben. Gewöhnlich werden nämlich zylinderförmige Proben mit einer Papierzwischenlage zwischen die krafteinleitenden Flächen der Druckprüfmaschine gestellt. Verwendet man statt der Papierschicht dagegen einen kleinen Zylinder mit dem gleichen Außendurchmesser und dergleichen Querkontraktionszahl wie der Versuchskörper (hier ein Tonerdeporzellan) selbst, so konnte /2/ eine Reduktion der ertragbaren Druckspannung um 22% beobachten, was zur Folge hatte, daß für den untersuchten Werkstoff die theoretische Forderung $\sigma_{\text{zug}}/\sigma_{\text{druck}}=\nu$ mit einem Fehler von

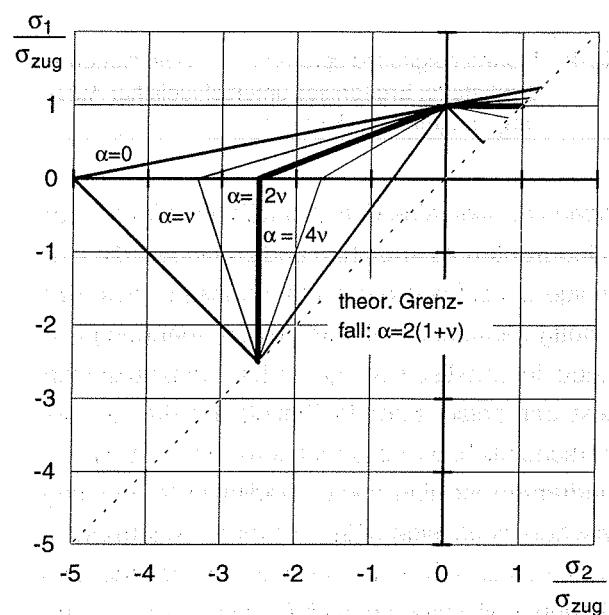


Bild 6: Vorgestellte Hypothese für verschiedene Schubwichtungsfaktoren α ohne Berücksichtigung der Festigkeitsstreuung ($m=\infty$; $\nu=0,2$)

etwa 10 % erfüllbar war. Dies zeigt, daß bei Druckbelastung positive Querdehnungen eine Rolle spielen müssen. Bei Aluminiumoxid beobachtet man aber z.T. bis um den Faktor 20 höhere Druckfestigkeiten. Dies ist sicher nicht ausschließlich auf Meßfehler zurückzuführen und kann darauf hinweisen, das die Querkontraktionszahl ν allein zur Beschreibung nicht ausreicht.

An dieser Stelle macht es daher Sinn, eine für die Schädigung effektive Querkontraktion ν_{eff} einzuführen, die bei Vernachlässigung der Festigkeitsstreuung per Definition aus dem gemessenen Unterschied zwischen Zug- und Druckfestigkeit durch die Gleichung

$$\nu_{eff} + \frac{\alpha_{eff}}{2} \stackrel{Def.}{=} \frac{\sigma_{zug}}{\sigma_{druck}}$$

gewonnen werden kann. Entsprechend ändert sich der Schubeinflussfaktor α_{eff} , wobei die Bereichsgrenzen analog übernommen werden können. Stehen Ergebnisse biaxialer Zugversuche (z.B. Doppelringtest) nicht zur Verfügung, so kann als erste Näherung $\alpha_{eff}=2\nu_{eff}$ gewählt werden (entspricht für den ebenen Spannungszustand der Mohrschen Hypothese bzw. im 1. Quadranten der Hauptspannungshypothese).

Die Berechtigung obiger Definition kann man dadurch plausibel machen, daß die unter uni- oder biaxialen Druck für das Versagen als verantwortlich postulierten positiven Querkontraktionen weniger schädigend als eine durch eine Zugspannung hervorgerufene richtungsgleiche Hauptdehnung sind.

Zur weiteren Veranschaulichung kann man sich im Sinne der Bruchmechanik einen Riß vorstellen, dessen Normale in Richtung der positiven Hauptdehnung liegt. Liegen im Falle des einachsigen Zuges positive Hauptdehnung und Hauptspannung auf derselben Achse (siehe auch Bild 5), so wird der Riß nicht nur durch die Dehnung geöffnet, sondern auch das Riufer durch die Hauptspannung (in diesem Fall Rinormalspannung) beansprucht. Liegt bei einachsiger Druckbelastung ein Riß in Richtung einer der beiden positiven Hauptdehnungen, so wird er zwar geöffnet, allerdings ist die Spannung in Riß-

normalenrichtung Null. Dieser Zustand ist für den Riß sicher weniger schädigend als der zuerst genannte Fall. Für die globale Beschreibung mittels der vorgeschlagenen Gleichungen muß also gelten: $0 < \nu_{eff} \leq \nu$. ν_{eff} kann nicht Null werden, weil sonst für $\alpha=0$ die ertragbare Druckfestigkeit unendlich groß wäre.

Der Einfluß der effektiven Querkontraktionszahl ν_{eff} ist im Prinzip vergleichbar mit der Reibungszahl μ in den bruchmechanischen Kriterien: Die Variation dieser Reibzahl auf der Riebene bedeutet wie die Variation von ν_{eff} ein Verschieben der Druckfestigkeit auf den negativen σ_1 - bzw. σ_2 -Achsen (vergl auch $\nu_{eff}=0,1$ und $m=\infty$ in **Bild 7** mit $\nu=0,2$ und $\alpha=2\nu$ in Bild 6). Bei den bruchmechanischen Kriterien können allerdings durch die Beschränkung $\mu \leq 1$ je nach Kriterium bzw. Rimodell nur Druckfestigkeiten von maximal dem siebenfachen der Zugfestigkeit vorhergesagt werden /1/. Durch die Wahl der Parameter $\nu_{eff}=0,0185$ und $\alpha_{eff}=0,037$ sind (bei Vernachlässigung der Festigkeitsstreuung) dagegen mit der vorgeschlagenen Hypothese sehr gut die Versuche von /5/ an Aluminiumoxid (siehe Bild 4) beschreibbar.

Im weiteren soll der Einfluß des Schubwichtungsfaktors α diskutiert werden. Wie Bild 6 zeigt, ist dieser bei uniaxialen Druck besonders groß, während er bei biaxialen Druck und uniaxialen Zug keine Rolle spielt. Für uniaxialen Zug ($\sigma_1=\sigma_{zug}$, $\sigma_2=\sigma_3=0$) ergibt sich aus den vorgeschlagenen Gleichungen als versagensbestimmende Vergleichsspannung die Beziehung

$$\sigma_{V1} = \sigma_{zug}$$

Das heißt, Versagen tritt infolge der maximalen Hauptspannung auf. Bei Versuchen (Zugstab, Biegestab) sind übereinstimmend Trennbrüche normal zur Hauptspannungsrichtung zu beobachten.

Für äquibiaxialen Zug (z. B. $\sigma_1=\sigma_3=\sigma_{zug}$, $\sigma_2=0$) ergeben sich als versagensbestimmend:

$$\sigma_{V1,3} = \sigma_{zug} - \nu_{eff}\sigma_{zug} + \alpha_{eff} \frac{\sigma_{zug}}{2}$$

Je nach Größe des Schubwichtungsfaktors α ergibt sich also eine kleinere ($\alpha < 2\nu$), gleichgroße ($\alpha = 2\nu$)

oder größere ($\alpha > 2\nu$) ertragbare Spannung als bei uniaxialem Zug. Wesentlichen Anteil an der Vergleichsspannung hat jedoch wiederum die Normalspannung, so daß in Versuchen z. B. an Doppelringprobekörpern gerade Trennbrüche in tangentialer wie in Umfangsrichtung zu beobachten sind.

Bei äquibiaxialem Druck (z. B. $\sigma_1=0, \sigma_2=\sigma_3=-\sigma_{\text{druck}}$) ergibt sich dagegen als versagensbestimmende Gleichung

$$\sigma_{V1} = 2\nu_{\text{eff}}\sigma_{\text{druck}}$$

also nur noch eine Abhängigkeit von der effektiven Querkontraktionszahl, nicht mehr vom Schubwichtungsfaktor. Dem Autor sind allerdings leider keine Bruchbilder vom Versagen bei äquibiaxialem Druck bekannt.

Besonders interessant ist nun die Betrachtung der Vergleichsspannungen, die sich bei uniaxialem Druck (z. B. $\sigma_1=\sigma_2=0, \sigma_3=-\sigma_{\text{druck}}$) ergeben:

$$\sigma_{V1,2} = \nu_{\text{eff}}\sigma_{\text{druck}} + \alpha_{\text{eff}} \frac{\sigma_{\text{druck}}}{2}$$

Am Versagen des Werkstoffes sind also sowohl Querdehnung (Berücksichtigung durch ν_{eff}) wie durch α_{eff} gewichteter Schub aus der Differenz zwischen Druckhauptspannung und senkrecht dazu liegenden normalspannungsfreien Hauptachsen ($\sigma_{\text{druck}}/2$) beteiligt. Der Einfluß der Querdehnung (Versuche von /2/) ist bereits beschrieben worden. Tatsächlich kann man beim einachsigen Druckversuch in den zahlreichen Trümmern, die vom Probekörper nach dem Versagen übrig bleiben, Bruchstücke finden, deren Bruchflächen um 45° zur Druckhauptachse geneigt sind. Deutlicher zeigt sich der Schubeinfluß allerdings an großen Zylindern, die auf einer Seite lokal durch einen kleinen Zylinder druckbeansprucht werden (solche Versuche wurden von /2/ durchgeführt). Im großen Zylinder entsteht dann unter dem kleinen ein annähernd hydrostatischer Spannungszustand. Hier wurde nie Versagen beobachtet. Es platzt dagegen typischerweise eine Ecke direkt neben dieser Beanspruchungszone heraus, die sich im Bereich der positiven Tangentialspannung durch einen Hauptspannungstrennbruch und zur Mitte des Zylinders hin durch eine kegelförmige 45° -Begrenzung auszeichnet.

Betrachtet man dagegen den Fall reiner Torsion (z. B. $\sigma_1=\sigma_{\text{zug}}, \sigma_2=0, \sigma_3=-\sigma_{\text{druck}}$ mit $\sigma_{\text{druck}}=-\sigma_{\text{zug}}$) so ergibt sich die Vergleichsspannung aus der Beziehung

$$\sigma_{V1} = \sigma_{\text{zug}} + \nu_{\text{eff}}\sigma_{\text{druck}} + \alpha_{\text{eff}} \frac{\sigma_{\text{druck}}}{2}$$

Obwohl Querdehnung und Schubeinfluß vorhanden sind, wird das Versagen für real vorkommende Werte von ν_{eff} und α_{eff} im wesentlichen durch die um 45° gegenüber der Torsionsachse liegende Zughauptspannung bestimmt, was sich praktisch durch einen sauberen Trennbruch /2/ bemerkbar macht.

6. Einbindung des Mehrachsigenkriteriums in die statistische Festigkeitstheorie

Grundgleichung für die statistische Festigkeitstheorie ist die von Weibull /6/ 1939 veröffentlichte Beziehung

$$P_V(\sigma) = 1 - \text{Exp} \left[-\frac{1}{V_0} \int_V \left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m dV \right]$$

Darin ist $P_V(\sigma)$ die Ausfallwahrscheinlichkeit, V das Bauteilvolumen, V_0 ein Bezugsvolumen (z.B. 1mm^3), m der Weibullmodul als Maß für die Festigkeitsstreuung, σ die im Bauteil auftretende Spannung, σ_0 eine Normierungsspannung und σ_u eine Spannung, unterhalb derer kein Bruch mehr auftritt. Mit dieser Gleichung ist allerdings nur der einachsige Spannungszustand erfaßt. Weibull selbst schlug vor, eine Vergleichsspannung durch das Berücksichtigen aller positiven Normalspannungskomponenten zu ermitteln, was jedoch bei Druckspannungen zu grundsätzlich falschen Aussagen führt.

Oftmals wird der einfache Ansatz gemacht, nur die drei Hauptspannungen (sofern positiv) zu berücksichtigen und diese additiv zu überlagern (Barnett-Freudenthal-Approximation; in der englischsprachigen Literatur als PIA-Modell, „Principle of Independent Action“, bezeichnet). In obiger Gleichung substituiert man also:

$$\left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m$$

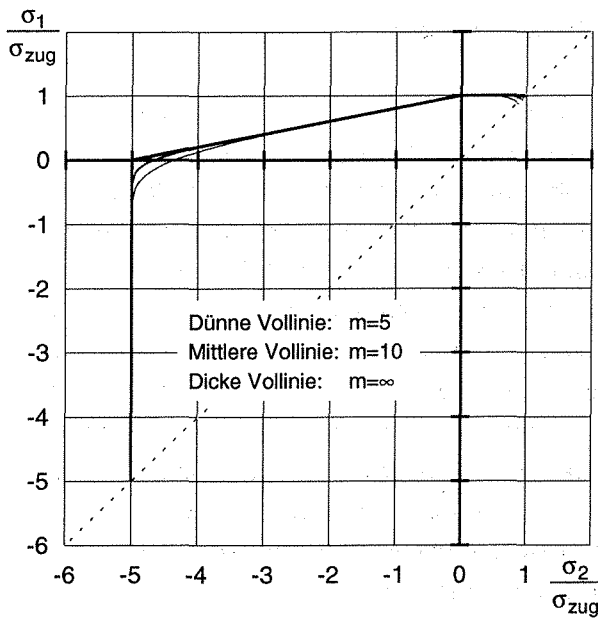


Bild 7: Einfluß des Weibullmoduls bei der vorgestellten Hypothese für $v_{eff}=0,1$ und $\alpha_{eff}=2v_{eff}$

Dieser im Prinzip rein willkürliche Ansatz besagt, daß jede Hauptspannung unabhängig von der anderen einen Teil zum Bruchrisiko beiträgt. Er wird in der Literatur daher oftmals kritisiert; meist liefert er zu geringe Ausfallwahrscheinlichkeiten. In /2/ liefert er dagegen zu hohe Bruchrisiken. /2/ setzt stattdessen in die obige Gleichung nicht die drei Hauptspannungen, sondern die drei Vergleichsspannungen nach der Hauptdehnungshypothese ein, wobei nur positive Hauptdehnungen berücksichtigt werden. Dies wird als „Hypothese der positiven Hauptdehnungen“ bezeichnet. Obwohl der von /2/ gewählte Ansatz formal wie das kritisierte PIA-Modell erscheint, liegt dennoch streng betrachtet kein solches Modell vor, da die drei eingesetzten Vergleichsspannungen im Gegensatz zu den Hauptspannungen voneinander abhängig sind. Dieser Ansatz soll daher übernommen werden.

Setzt man $\sigma_u=0$ (mit dieser Vereinfachung liegt man „auf der sicheren Seite“) und vergleicht einachsiges und mehrachsiges Bruchrisiko, so ergibt sich als endgültige Vergleichsspannung die Beziehung

$$\sigma_V = (\sigma_{V1}^m + \sigma_{V2}^m + \sigma_{V3}^m)^{1/m}$$

Damit verbunden ist also mit fallendem Weibullmodul ein Verrunden der Ecken im ersten Quadranten sowie in der Nähe der einachsigen Druckfestigkeit der negativen σ_1 - und σ_2 -Achsen (**Bild 7**). Durch

diese Gleichung kann man auch erklären, wieso der Fall $\alpha_{eff} > 2v_{eff}$ bei statistischer Betrachtung für den einachsigen Spannungszustand problematisch zu beschreiben ist: Hier werden dann nämlich alle drei Vergleichsspannungen positiv, wobei mindestens eine der Spannungen gleich der Zugfestigkeit ist, so daß als Folge eine zu geringe einachsige Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet wird. Dieser Fehler ist aber sehr gering, für $m \geq 5$ und $\alpha_{eff} \leq 4v_{eff}$ beträgt er weniger als ca. 0,01%, so daß die mathematische Unvollkommenheit dieses Ansatzes praktisch ohne Bedeutung bleibt. Den Einfluß von m und α_{eff} im ersten Quadranten zeigt für einige feste Werte **Bild 8**. Man kann davon ausgehen, daß durch die fast geradlinige Verbindung im zweiten und vierten und die negative Anfangssteigung im ersten Quadranten für $\alpha_{eff} > 2v_{eff}$ Vorhersagen getroffen werden, die auf der sicheren Seite liegen (vergl. Bilder 4 und 7).

Bei statistischer Betrachtung ergibt sich durch Gleichsetzen der Bruchrisiken als Verhältnis von einachsiger Zug- zu Druckspannung für gleichgroße beanspruchte Volumen die Beziehung:

$$\frac{\sigma_{zug}}{\sigma_{druck}} = \sqrt[m]{2 \cdot \left(v_{eff} + \frac{\alpha_{eff}}{2} \right)^m}$$

Durch einen weiteren biaxialen Versuch, z. B. einen Doppelringtest, ist es möglich, die Werte α_{eff} und v_{eff} eindeutig zu bestimmen und damit das Kriterium optimal an Versuchsergebnisse anzupassen.

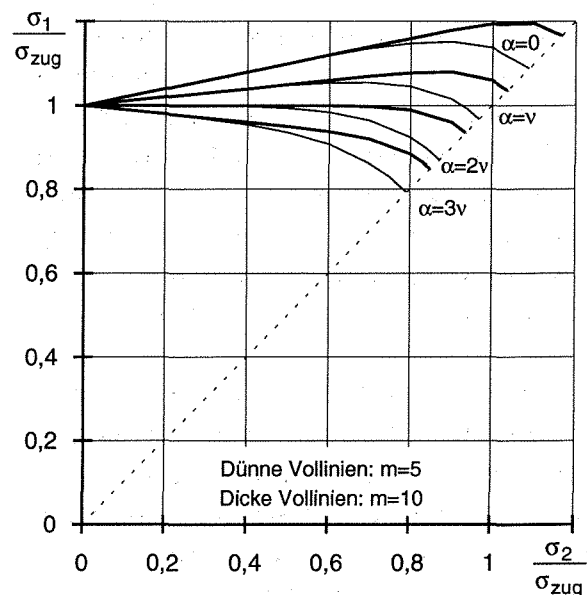


Bild 8: Einfluß des Weibullmoduls und des Schubwichtungsfaktors im ersten Quadranten für $v=0,2$

7. Bestimmung der Konstanten

Sinnvolle Vorhersagen für ausgeführte Konstruktionen sind nur möglich, wenn die Probekörper nach demgleichen Verfahren wie das Bauteil hergestellt sind und eine vergleichbare Oberflächenbeschaffenheit haben. Sieht man von diesem grundsätzlichen Problem einmal ab, so kann man zur Bestimmung der Konstanten wie folgt vorgehen:

1. Bestimmung des Elastizitätsmoduls
2. Bestimmung von m , σ_0 und ggf. σ_u aus einem einachsigen Versuch (z. B. Zug- oder Biegeversuch)
3. Bestimmung der einachsigen Druckfestigkeit (dabei ist darauf zu achten, daß die Querdehnung nicht behindert wird!)
4. Durchführen eines Doppelringversuchs, um den Einfluß des äquibiaxialen Zuges zu erfassen

Damit können die Konstanten α_{eff} und ν_{eff} und somit die Hüllkurve im σ_1/σ_2 -Diagramm eindeutig bestimmt werden. Weitere Versuche sind im Prinzip nicht mehr erforderlich, da das Kriterium keine weiteren „Freiheitsgrade“ mehr hat. Wird jedoch das Bauteil überwiegend auf Druck beansprucht, so empfiehlt es sich, statt des Doppelringversuches, der äquibiaxialen Zug hervorruft, einen Versuch im dritten Quadranten durchzuführen, um den biaxialen Druck besser zu erfassen, da – durch die Konstanten α_{eff} und ν_{eff} bedingt – erster und dritter Quadrant (Bild 6) voneinander abhängig sind. Ob dies der Realität entspricht, kann der Autor noch nicht beurteilen, da eigene Versuche nicht gemacht wurden und ihm entsprechende Untersuchungen nicht bekannt sind. Das Verhalten im 1. und 2. oder im 2. und 3. Quadranten kann jedoch mit dem vorgeschlagenem Ansatz beschrieben werden. Zur Beurteilung der Spannungszustände praktisch ausgeführter Konstruktionen ist dies meist ausreichend.

Das vorgeschlagene Kriterium kann übrigens auch für Oberflächenverteilungen eingesetzt werden. Dabei vereinfacht sich die mathematische Behandlung, denn es müssen nur zwei Hauptspannungen berücksichtigt werden. Außerdem muß dann nur noch ein Zweifachintegral bei der Lösung der Weibull-Gleichung aufgestellt werden.

8. Zusammenfassung

Es wird ein Ansatz für ein semiempirisches Mehrachsigenkriterium vorgestellt, das sich auf den Einfluß gewichteter Verzerrungen stützt. Mit diesem Kriterium können sehr viele praktisch an Keramik beobachtbare Eigenschaften erklärt werden. Bei minimalem Versuchsaufwand an einfachen Probekörpern können damit Vorhersagen für komplexe Bauteile getroffen werden, die bei entsprechender Wahl der vorgeschlagenen semiempirischen Faktoren auf der sicheren Seite liegen. Das Kriterium ist mathematisch einfach aufgebaut, wobei bewußt auf bruchmechanische Betrachtungsweisen verzichtet wurde, und kann sehr leicht auf dem Rechner programmiert werden. Es wendet sich daher an den in der Praxis stehenden Ingenieur, der mit möglichst geringem Aufwand zuverlässig einsetzbare keramische Bauteile dimensionieren muß. Ein vollständiger experimenteller Nachweis des Kriteriums konnte jedoch mangels Versuchsergebnissen bisher nicht durchgeführt werden.

Literatur

- /1/ Munz, D.; Fett, Th.: Mechanisches Verhalten keramischer Werkstoffe, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989
- /2/ Beierlein, G.: Festigkeitsverhalten keramischer Werkstoffe unter mehrachsiger mechanischer Beanspruchung, Diss. Ingenieurhochschule Zwickau, 1988
- /3/ Thiemeier, Th.: Lebensdauervorhersage für keramische Bauteile unter mehrachsiger Beanspruchung, Diss. Universität Karlsruhe, 1989
- /4/ Nadler, P.: Beitrag zur Charakterisierung und Berücksichtigung des spezifischen keramischen Festigkeitsverhaltens, Diss. Bergakademie Freiberg, 1989
- /5/ Adams, M.; Sines, G.: Determination of biaxial compressive strength of a sintered alumina ceramic, Journal of the American Ceramic Society 59, 1976, 300-304
- /6/ Weibull, W.: A Statistical Theory of the Strength of Materials, Ingenieursvetenskapsakademiens Handlingar, Stockholm, Nr. 151 (1939)