

MITTEILUNGEN AUS DEM  
INSTITUT FÜR MASCHINENWESEN  
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT  
CLAUSTHAL

INSTITUTSDIREKTOR PROF. DR.-ING. A. KUSKE

Nr. 6/1976

# Numerische Spannungsberechnung bei Torsion prismatischer Bauteile beliebigen Querschnitts

Prof. Dr.-Ing. A. Kuske

## 1. Spannungsfunktion

Bei torsionsbeanspruchten prismatischen Bauteilen beliebigen Querschnitts lassen sich die Spannungen mit sehr einfachen Rechenverfahren ermitteln. Hierin liegt ein weiterer Schritt zur Entwicklung von Verfahren zur Spannungsberechnung, die mit kleinen Rechenmaschinen auskommen.

Für die Spannungsberechnung in prismatischen Bauteilen kann die Spannungsfunktion  $S$  angewendet werden, für die

$$\Delta S = - 2G\theta \quad (1)$$

gilt. Sie liegt übrigens dem bekannten Prandtl'schen Seifenhaut-Gleichnis zugrunde. Danach ist die Schubspannung in einem Punkt eines Querschnitts proportional dem Gefälle des Seifenhauthügels, wenn sein Volumen proportional (bis auf den Faktor 2) dem zu übertragenden gesamten Moment entspricht.

Man kann hierbei den Begriff eines Widerstandsmomentes für Torsion  $W_t$  mit der Bedeutung  $W_t = M_t / \tau_{t \max}$  anwenden. Beide Größen werden bei experimentellen Spannungsermittlungen mit Hilfe des Seifenhauthügels gefunden und ebenso bei dem nachfolgend beschriebenen Rechenverfahren.

## 2. Differenzengleichung

Für die numerische Berechnung wird die Differentialgleichung (1) in eine Differenzengleichung umgewandelt. Sie liefert dann für die 4 Eckpunkte 1, 2, 3 und 4 eines Quadrates - als Element der Querschnittsfläche - und den Mittelpunkt dieses Quadrates, der mit 0 bezeichnet sei:

$$S_0 = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} + \frac{G \theta h^2}{2} \quad (2)$$

wobei  $h$  die halbe Länge der Diagonalen des Quadrats bedeuten. Mit der Randbedingung:  $S = \text{const.}$  läßt sich - für eine willkürlich zu wählende Größe von  $2G\theta$ , (mit  $h^2 = 1 \text{ cm}^2$ ) z.B.  $2/\text{cm}^2$ , die Höhe von  $S$  - also gewissermaßen die Höhe des Seifenhauthügels - für jeden Punkt berechnen. Das kann grundsätzlich mit Hilfe eines entsprechenden Systems von linearen Gleichungen ausgeführt werden. Dabei wird die Zahl der Unbekannten und damit der Gleichungen gleich der Zahl der Quadrate, in die die Fläche unterteilt wurde. Dieser Weg erfordert zwar eine relativ kurze Rechenzeit, kann aber nur mit leistungsfähigen Rechenmaschinen und einem entsprechenden Programm durchgeführt werden. Sehr viel einfacher, wenn auch mit etwas mehr Arbeitsaufwand im Einzelnen ist die iterative Lösung. Hier kann man eine Abwandlung des Verfahrens nach Liebmann, daß für die Lösung von Laplace'schen Gleichungen benutzt wird, anwenden. Es hat sich gezeigt, daß dieses Verfahren ebenso rasch konvergiert, wie bei der Lösung der homogenen Gleichungen der Potentialtheorie.

### 3. Durchführung des Iterationsverfahrens

Wenn man z.B. die Spannungsverteilung in einem Rechteckquerschnitt ermitteln will, teilt man diesen zunächst in entsprechende Quadrate ein, wobei, wie sich gezeigt hat, die Aufteilung gar nicht allzu fein zu sein braucht, um genaue Ergebnisse zu erzielen.

Die Größe von  $S$  ist für die Randpunkte gleich, sie kann willkürlich festgesetzt werden, zweckmäßigerweise setzt man sie gleich 0. Für die Werte von  $S$  im Innern der Fläche kann man grundsätzlich zunächst beliebige Werte annehmen, um sie dann durch die Iteration zu verbessern. Setzt man alle diese Werte ebenfalls gleich 0, so erfordert die Berechnung eine relativ große Anzahl von Schritten. Man kann durch Überlegungen die Größe von  $S$  in den einzelnen Punkten grob vorausschätzen, womit sich die Zahl der erforderlichen Schritte stark vermindern läßt. Man beginnt beispielsweise an einer Ecke des äußeren Randes, an dem also die drei Randpunkte gleich 0 sind und der vierte Punkt zunächst einen willkürlich angenommenen Wert hat. Daraus errechnet sich der Wert für den Mittelpunkt nach Gl. (2). Auf diese Weise berechnet man zunächst für alle Teilquadrate den Wert von  $S_0$  in der Mitte. Danach benutzt man die so berechneten Werte  $S_0$  für die Mittelpunkte als Werte für die Eckpunkte eines Systems von Quadraten, daß jeweils um eine halbe Seitenlänge gegenüber dem ursprünglichen System verschoben ist. Diese Rechenoperationen wiederholt man solange, bis die errechneten Werte keine wesentlichen Änderungen mehr zeigen. Damit ist der schwierigste Teil der Berechnung bereits erledigt.

### 4. Auswertung

Man berechnet dann das Volumen dieses Hügels, indem man die Werte für die Höhe in den einzelnen Punkten addiert und mit der entsprechenden Flächeneinheit multipliziert. Dieser Wert entspricht dann dem  $M_t$ . Die Höhe der Spannung  $\tau_t$ , insbesondere die höchste Spannung  $\tau_{\max}$  kann man nun aus den Werten in den randbenachbarten Punkten finden. Der Punkt des größten Gefälles und damit der größten Spannung ist sofort zu erkennen. Das Gefälle an dieser Stelle  $\partial S / \partial n$  kann man aus diesen Zahlen ablesen. Besondere Genauigkeit erzielt man dabei, wenn man die errechneten Werte auf den Rand selbst extrapoliert. Das Verhältnis des Volumens zu dem Gefälle ist dann bis auf den Faktor 2 gleich dem Wert von  $W_t$ :

$$W_t = \frac{2V}{\frac{\partial S}{\partial n}} = \frac{M_t}{\tau_{\max}} \quad (3)$$

### 5. Allgemeine Randform

Die Beziehung Gl. (2) läßt sich nun leicht abwandeln für Randformen, die nicht wie in diesem einfachsten Beispiel rechteckig sind, sondern eine beliebige Form haben, so daß am Rande anstelle der Quadrate etwas verzernte Vierecke entstehen können.

Ein weiteres Problem liegt hier in der Ermittlung der Spannungen von Hohlquerschnitten. Längs des Randes eines Ausschnittes aus einem Querschnitt ist  $S$  ebenfalls konstant, jedoch nicht gleich 0 zu setzen. Vielmehr findet man den richtigen Wert von  $S$  hier durch probieren. Zunächst kann man für den Querschnitt des Ausschnittes ebenfalls einen solchen "Seifenhauthügel" berechnen unter den gleichen Voraussetzungen wie beschrieben. Daraus findet man für den Rand dieser Form an jedem Punkt die Spannungshöhe. Nun gilt nach dem Satz von Stokes, daß der Mittelwert dieser Spannung gleich dem Mittelwert der Spannung an dem Lochrand ist. Man wählt also bei dem Rechenverfahren den Wert von  $S$  für den Rand zunächst willkürlich, berechnet danach die sich ergebenden Spannungen längs des Lochrandes (unter Extrapolieren wie oben beschrieben). Zeigt sich, daß der so berechnete Mittelwert zu hoch oder zu niedrig ist, so muß er entsprechend verändert werden.

#### 6. Berechnung der Verwölbung

Aus den so errechneten Spannungen, insbesondere am Rande, kann man nun auch noch die Verwölbung des Querschnitts entnehmen. Dabei geht man von der bekannten Vorstellung aus, daß sich die Spannungen in einem nicht rotationssymmetrischen Querschnitt zusammensetzen aus Spannungen nach der elementaren Formel für Kreisquerschnitte, bei denen ja keine Verwölbung auftritt, und zusätzlichen Spannungen, die zu der Verwölbung führen. Die Gesamtspannung ist dabei die vektorielle Summe aus den beiden genannten Größen. Da die Gesamtspannung bekannt ist und auch die Größe der Spannung bei einem rotationssymmetrischen Querschnitt, ergibt sich die Verwölbungsspannung aus dem entsprechenden Vektordreieck. Diese Spannung, deren Größe von dem Torsionsmoment, den absoluten Abmessungen und dem Schubmodul des Materials im Einzelfall abhängt, läßt sich daraus leicht zahlenmäßig angeben.

#### 7. Anwendung des Verfahrens

Es hat sich gezeigt, daß dieses Rechenverfahren mit den kleinsten Taschenrechnern in relativ kurzer Zeit durchgeführt werden kann. Es ist daher sowohl für die Industrie geeignet, wo entweder keine großen Rechner zur Verfügung stehen oder der Aufwand für die Erarbeitung eines entsprechenden Programms, wenn dies nicht schon vorhanden ist, eingespart werden soll. Natürlich ist es ganz besonders für Ausbildungszwecke geeignet, da es einerseits eine Vorstellung bezüglich der Spannungshöhe und Verteilung vermittelt und andererseits ein einfaches Übungsbeispiel für die numerische Spannungsberechnung darstellt.

Über dieses Verfahren wird in einer Veröffentlichung demnächst ausführlich berichtet werden.

## Leckverluste an Druckluft-Drehkolbenmotoren

Dr.-Ing. J. Barth

### 1. Mögliche Leckstellen

Während bei Hubkolbenmotoren mit Hilfe von Kolbenringen eine sehr gute Abdichtung zwischen den Kolbenseiten erreicht wird, ist eine solche Abdichtung bei Drehkolbenmotoren kaum möglich. Die für einwandfreien Betrieb erforderlichen Spiele zwischen Stirnseiten und Umfang der Rotoren einerseits und dem Gehäuse andererseits bilden Spalte, durch die Druckluft ohne Arbeit zu verrichten entweichen kann. Weitere Leckverluste können durch ungenügend abgedichtete Lager entstehen.

### 2. Experimentelle Bestimmung der Leckstromquerschnitte

Druckluftmotoren werden im allg. bei Druckverhältnissen zwischen Ein- und Auslaß betrieben, die unterhalb des Lavaldruckverhältnisses liegen. Dann gilt bekanntlich, daß im engsten Strömungsquerschnitt, hier also dem engsten Leckstromquerschnitt, gerade Schallgeschwindigkeit erreicht wird. Mit der Schallgeschwindigkeit  $W_s$

$$W_s = \sqrt{\kappa} \cdot p_s \cdot v_s = \sqrt{\kappa} \cdot R \cdot T_s$$

ergibt sich für den Leckvolumenstrom

$$\dot{V}_L = \alpha \cdot A_L \cdot W_s = \alpha \cdot A_L \sqrt{\kappa} \cdot R \cdot T_s$$

Unter der Annahme adiabater Zustandsänderung vom Vordruck  $p_1$  auf den Lavaldruck  $p_s$  gilt für die Temperatur  $T_s$  im engsten Leckstromquerschnitt

$$\frac{T_s}{T_1} = \left(\frac{p_s}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 0,834 \quad \text{für Luft}$$

mit dem Lavaldruckverhältnis

$$\frac{p_s}{p_1} = 0,53 \quad \text{und} \quad \kappa = 1,4 \quad \text{für Luft}$$

Der effektive Leckvolumenstrom ist also unabhängig vom Vordruck und ändert sich proportional der Wurzel aus  $T_s$  bzw.  $T_1$ . Der Massenstrom

$$M_L = \alpha \cdot A_L \cdot \rho_s \cdot W_s$$

wächst linear mit der Dichte, d.h. mit dem Vordruck  $p_1$ . Aus Messungen des Luftverbrauchs der blockierten Maschine kann nun in einfacher Weise ein theoretischer Leckstromquerschnitt

$$A_{L,th} = \alpha \cdot A_L$$

bestimmt werden, der eine nützliche Vergleichsbasis beim Vergleich von Motoren darstellt. Bei mehreren Messungen ergaben sich für die Ausflußzahl  $\alpha$ , mit der die Minderung der ausfließenden Menge durch Reibung und, falls vorhanden, durch Kontraktion berücksichtigt wird, Werte um 0,8. Dies entspricht etwa dem Wert, der allgemein (z.B. (1)) für das Verhältnis von mittlerer zu maximaler Geschwindigkeit in turbulenter Strömung angegeben wird. Der Wert der Ausflußzahl  $\alpha$  wird im wesentlichen von der Reibung bestimmt, die ihrerseits von der Reynolds-Zahl abhängt. Die Geometrie der Strömungskanäle ist gekennzeichnet durch die heute erreichbaren Betriebsspiele (Leckspaltweiten) (für kleine und mittlere Motoren etwa 0,04 - 0,08 mm) und "große" Leckspaltlängen, ist also gleich oder zumindest von gleicher Größenordnung. Für gleiche Temperaturen ist die Schallgeschwindigkeit als kennzeichnende Strömungsgeschwindigkeit konstant, so daß sich nur infolge der Druckabhängigkeit der kinematischen Zähigkeit die Reynoldszahl ändern kann. Da die Ausflußzahl  $\alpha$  sich nicht stark mit der Reynoldszahl ändert, kann man, besonders für Abschätzungen, von dem oben angegebenen Wert  $\alpha = 0,8$  ausgehen.

Damit gelingt es, die Leckverluste durch die spielbedingten Leckspaltquerschnitte auch ohne Messung abzuschätzen. Bei Messungen kann man ferner erkennen, ob die Leckverluste durch undichte Lager erheblich sind ( $\alpha \gg 0,8$ ).

Zur praktischen Durchführung der Messung: Bei Zahnradmotoren lassen sich bei blockierter Maschine einwandfrei reproduzierbare Volumenströme messen. Bei Druckluftlamellenmotoren mit ihren beweglichen Lamellen konnten auf diese Art keine reproduzierbaren Werte bestimmt werden, weil dort offenbar der Leckverlust stark von der Lage der Lamellen zur Lufteintrittsöffnung abhängt. Hier wurde eine Extrapolation aus Luftverbrauchskurven  $\dot{V} = f(n)$  auf die Drehzahl  $n = 0$  vorgenommen. Aus den extrapolierten Werten ergaben sich dann aufgrund der oben dargestellten Zusammenhänge vom Vordruck unabhängige Leckstromquerschnitte, die mit den zuvor abgeschätzten Querschnitten gut übereinstimmten.

### 3. Einfluß der Drehbewegung auf den Leckstrom

Das dynamische Verhalten der Leckströme bei drehender Maschine ist wesentlich schwieriger zu beurteilen: die Strömungsverhältnisse in den Leckspalten werden außerordentlich unübersichtlich, weil einmal die Rotordrehung die Leckströmung beeinflusst und zum anderen sich "sekundäre" Leckströme aus den sich bewegenden Kammern bei Lamellenmotoren und aus den Zahnlückenräumen bei Zahnradmotoren ausbilden. Da die Druckunterschiede zwischen zwei benachbarten Kammern gering sind, wird der Leckverlust am Umfang sehr gering und nur kurz vor Erreichen der Auslaßkante stärker werden. Da die Sekundärleckströme und die Leckverluste am Umfang sich erst nach Trennung der Kammern vom Einlaß ausbilden, werden sie mit wachsender Drehzahl abnehmen.

Die verwickelten Verhältnisse durch Messungen überschaubar zu machen erscheint praktisch nicht möglich, weil bei der Kleinheit der Motoren die interessierenden Bereiche für Messungen nicht zugänglich sind und bei der Kleinheit der Leckspalte jeder Meßfehler bzw. jede Meßöffnung die zu messende Strömung beträchtlich stören würde. Eine indirekte Beurteilungsmöglichkeit bietet hier der Vergleich zwischen errechneten und gemessenen Luftverbrauchskurven, wenn bei der Berechnung ein von der Drehzahl unabhängiger Leckvolumenstrom zugrunde gelegt wird.

#### 4. Einfluß der Eintrittsdrosselung auf den Leckstrom

Der Leckmengenstrom ändert sich, wie eingangs dargestellt, linear mit dem Druck im Motoreinlaß. Die eintretende Druckluft wird in den Einlaßkanälen gedrosselt. Die Drosselung ist dabei (zumindest näherungsweise) proportional dem Quadrat des Volumenstroms

$$\Delta p = \zeta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\dot{V}^2}{A_D^2}$$

Der Volumenstrom wird im wesentlichen bestimmt vom Schluckvermögen des Motors, d.h. dem Produkt aus Kammervolumen und Drehzahl, wächst also bei ungedrosselter Zuströmung linear mit der Drehzahl. Der Druckverlust durch Drosselung steigt demnach etwa quadratisch mit der Drehzahl an und der Leckmengenstrom verringert sich, wenn die beschriebenen dynamischen "Dichteffekte" nicht berücksichtigt werden, proportional zum abnehmenden Eintrittsdruck. Das Verhältnis von Leckmengenstrom zu arbeitsverrichtender Druckluft ändert sich durch die Drosselung nicht.

#### 5. Einfluß der Motorgröße auf den Leckstrom

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß mit wachsender Motorgröße das Verhältnis von Leckströmen zu arbeitsverrichtender Druckluft abnimmt, weil bei Vergrößerung die Leckspatllängen bei etwa konstanten Bauspielen linear, die Kammervolumina aber mit der dritten Potenz des Maßstabsfaktors anwachsen.

$$\frac{A_{L1}}{A_{L2}} = \frac{sp_1 \cdot s}{sp_2 \cdot s} = M \qquad \frac{V_{K1}}{V_{K2}} = \frac{d_1^2 \cdot b_1}{d_2^2 \cdot b_2} = M^3$$

Dies ist einer der Gründe dafür, daß mit größeren Motoren günstigere spezifische Leisten erzielt werden als mit geometrisch ähnlichen kleineren Motoren gleicher Bauart.

#### Literatur

- [1] Dubbel I, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1966

## Spannungsoptisches Verfahren zur Ermittlung der Spannungen in Umformwerkzeugen, die durch ein plastisches Umformgut belastet werden

Dr.-Ing. J. Zech

### 1. Lebensdauer von Umformwerkzeugen

Die Ermittlung von Spannungen in Umformwerkzeugen, die durch das Werkstück (Umformgut) belastet werden, konnte auch durch den Einsatz neuer Groß-Rechenanlagen kaum verbessert werden, da die Randbedingungen, also die Kraftverteilung zwischen Umformgut und Werkzeug, in praktisch allen Fällen unbekannt ist. Wenn die Randbedingungen geschätzt oder stellenweise experimentell annähernd bestimmt werden, so bleiben oft noch große mathematische Schwierigkeiten und mangelnde Rechnerkapazität zu bewältigen.

Die bisher angewandten experimentellen Methoden sind ebenfalls unbefriedigend:

- bei der Verwendung von DMS erhält man nur Ergebnisse für wenige Meßpunkte, wobei besondere Schwierigkeiten auftreten, wenn man im Innern des Werkzeuges oder an den formgebenden Konturen während des Umformvorganges messen will;
- wendet man das spannungsoptische Oberflächenschichtverfahren |1| oder das Moiré-Verfahren |2| an, erhält man lediglich an der weniger beanspruchten und sichtbaren Außenkontur Meßergebnisse;
- bei spannungsoptischen Versuchen wurden bisher zur Belastung von Umformwerkzeugen nur abgeschätzte Einzelkräfte |3| verwendet. Gelegentlich wurde mithilfe von sich elastisch verhaltenden Modellumformmaterialien die Lastverteilung auf das Werkzeug angenähert.

Durch das am Institut für Maschinenwesen entwickelte und im folgenden beschriebene spannungsoptische Verfahren wird die Spannungsermittlung in Umformwerkzeugen einfacher, genauer und wesentlich billiger.

### 2. Spannungsoptisches Versuchsverfahren

Von dem zu untersuchenden Umformwerkzeug wird ein Modell in beliebigem Maßstab hergestellt, bei dem diejenigen Ebenen, in denen die Spannungen ermittelt werden sollen, aus einem spannungsoptisch aktiven Modellwerkstoff (z.B. Epoxiharz) hergestellt werden. Der Rest des Modells bzw. die Abdeckplatten bei ebenen Modellen werden aus spannungsoptisch nicht |4| oder wenig aktivem Material (z.B. Plexiglas) hergestellt. Der Zusammenhalt des Modells wird durch Kleben |5|, Klammern oder Verschrauben gewährleistet.

Die Belastung erfolgt durch ein viskoelastisches Modellumformgut, das sich hinsichtlich der Belastungsverteilung auf das Werkzeug ähnlich verhält wie ein metallisches Umformgut im vollplastischen Zustand. In Vergleichsuntersuchungen hat sich dafür das unausgehärtete Epoxiharz Lekutherm X 30 der

Firma Bayer Leverkusen als besonders geeignet herausgestellt, da es zusätzlich die Spannungsermittlung im Umformgut ermöglicht [6].

### 3. Modellaufbau

Bei der Modellherstellung muß man verschiedene Fälle unterscheiden. Zunächst wird geprüft, ob das Umformwerkzeug anhand ebener, dünner Schnitte untersucht werden kann oder ob die Berücksichtigung eines räumlichen Spannungszustandes notwendig ist. Beide Fälle unterteilen sich noch einmal danach, ob das Umformgut den Bereich des Modells, der spannungsoptisch ausgewertet werden soll, durch Überströmen verdeckt oder zur Beobachtung freiläßt. Die durch diese vier unterschiedlichen Fälle bedingten Modellaufbauten sind in den Abb. 1 bis 4 dargestellt:

zu Abb. 1:

das ebene Modell des Umformwerkzeuges wird seitlich vom Umformgut umströmt; der spannungsoptische Effekt ist in einem Polariskop ohne weiteres zu beobachten und auszuwerten. Die vordere und hintere Abdeckung des ebenen Modells erfolgt z.B. durch Plexiglas-Scheiben.

zu Abb. 2:

da das Modellumformgut spannungsoptisch aktiv ist und vor und hinter dem ebenen Modell vorbeigepreßt wird, überlagern sich die optischen Effekte in Modell und Umformgut. Deshalb müssen die Polarisationsfilter direkt auf das Modell aufgeklebt werden. Die Abdeckung erfolgt z.B. durch Plexiglas-Scheiben.

zu Abb. 3:

das dreidimensionale Modell wird z.B. aus Plexiglas hergestellt. In diejenigen Ebenen, in denen die Spannungen ermittelt werden sollen, werden spannungsoptisch aktive Schichten eingesetzt. Bei Belastung des Modells zeigen dann nur die gewünschten Ebenen einen spannungsoptischen Effekt, der ausgewertet werden kann.

zu Abb. 4:

wird das räumliche Modell durch das Umformgut verdeckt, müssen außer den spannungsoptisch aktiven Schichten auch noch die Polarisationsfilter mit eingeklebt werden, um eine Auswertung vornehmen zu können.

Da die Reibung einen großen Einfluß auf die Spannungsverteilung im Werkzeug hat, muß der Reibbeiwert zwischen Werkzeug und Umformgut im Modell durch entsprechende Schmierung dem Reibbeiwert in der Hauptausführung angeglichen werden [6].

Die Methoden zur Auswertung der optischen Effekte in den spannungsoptisch aktiven Ebenen des jeweiligen Modells sind in [1] beschrieben.

Literatur

- |1| KUSKE, A., ROBERTSON, G.: Photoelastic Stress Analysis, J. Wiley und Sons, London 1973
- |2| THEOCARIS, P.S.: Moiré Fringes in Strain Analysis, Pergamon Press, Oxford 1969
- |3| WANDERS, D.: Berechnung und Optimierung von Hochtemperaturwerkzeugen am Beispiel von Strangpreßmatrizen, Diss. TU Clausthal, 1972
- |4| REINHARDT, H.W.: Beitrag zur spannungsoptischen Untersuchung instationärer, räumlicher Wärmespannungszustände, Diss. TU Stuttgart, 1968
- |5| BARTH, J.: Die Befederung von Platten- und Kanalventilen im Verdichter, Grundlagen der Berechnung und Überprüfung im Simulator sowie spannungsoptische Untersuchung bei Stoßbelastung der Platten, Diss. TU Clausthal, 1971
- |6| ZECH, J.: Ermittlung der Spannungen und Formänderungen bei mechanischen Umformvorgängen an Metallen aus spannungsoptischen Modellversuchen, Diss. TU Clausthal, 1976

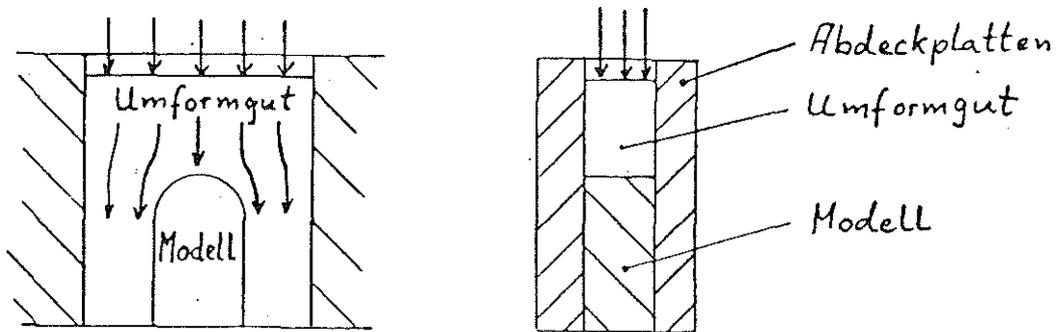


Abb. 1

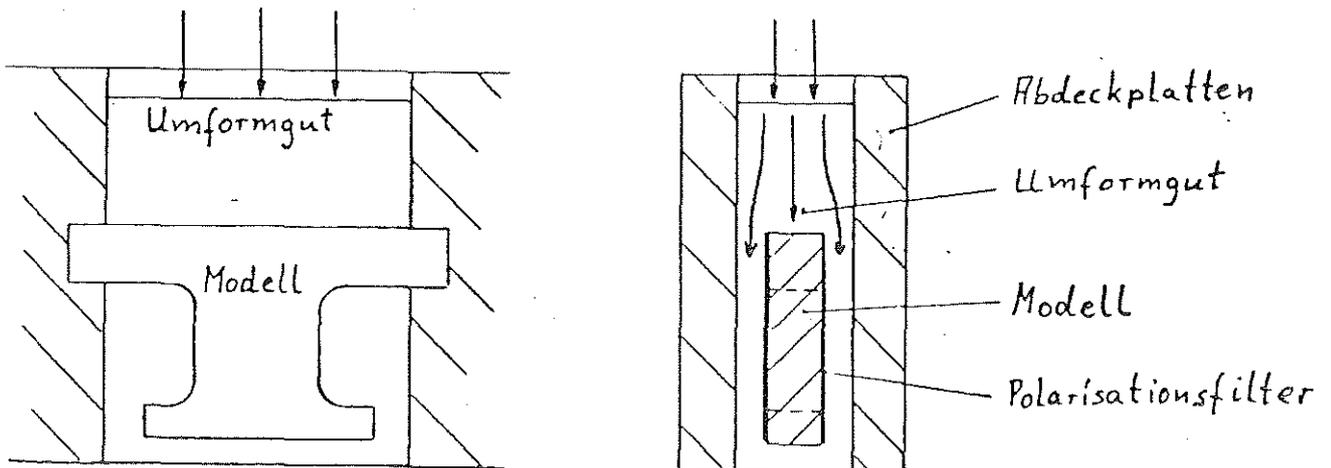


Abb. 2

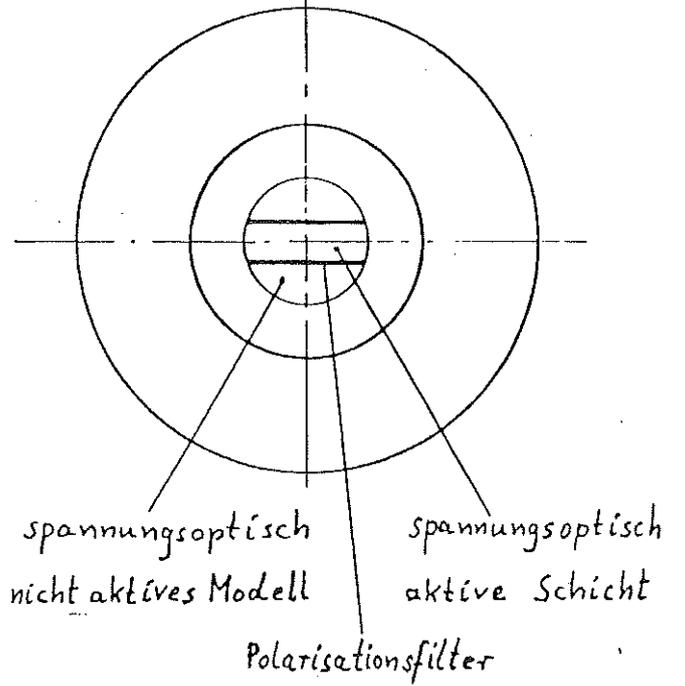
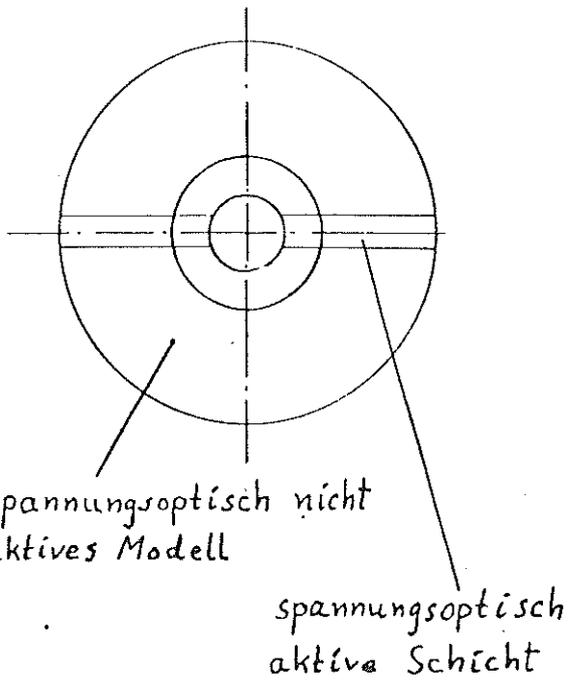
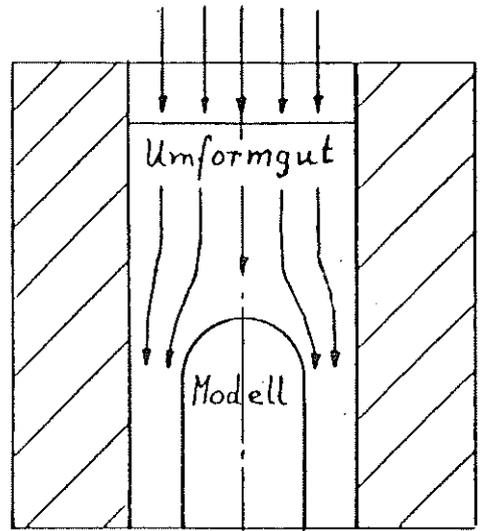
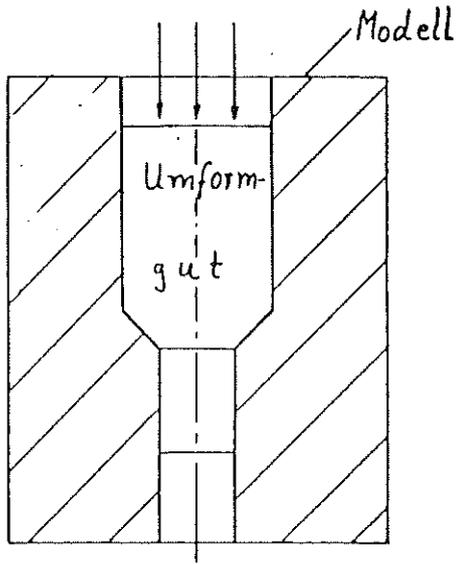


Abb. 3

Abb. 4

## Beispiele zur Veranschaulichung des Singularitäten-Überlagerungs-Verfahrens

Dipl.-Ing. J. Ertner

### 1. Geschlossene oder numerische Lösung

Es soll hier an Beispielen das Prinzip des Singularitäten-Überlagerungs-Verfahrens für die Berechnung von Spannungen in Scheiben infolge äußerer Kräfte sowie behinderter Wärmedehnungen gezeigt werden. Dies soll am dickwandigen Rohr demonstriert werden. Da hier die Belastungen und Berandungen symmetrisch sind, bekommt man eine geschlossene Lösung, während bei anderen Problemen man eine andere Methode - numerische oder zeichnerische [1] - anwenden muß. Diese so gefundene Lösung kann mit aus der Literatur [2] bekannten verglichen werden.

### 2. Dickwandiges Rohr - belastet durch Kräfte

#### 2.1 Grundlagen

Als Grundlage dient der Spannungsverlauf in einer unendlichen Scheibe, der durch eine gleichmäßige Kräfteverteilung  $p_u$  am Radius  $r_o$  (Abb. 1) verursacht wird.

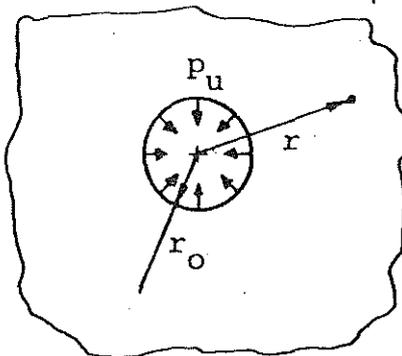


Abb. 1

Außerhalb des Kreises sind die Spannungen

$$\sigma_t(r) = -\frac{1-\nu}{2} p_u \left(\frac{r_o}{r}\right)^2 = -\alpha p_u \left(\frac{r_o}{r}\right)^2 \quad \text{und} \quad \sigma_r(r) = \frac{1-\nu}{2} p_u \left(\frac{r_o}{r}\right)^2 = \alpha p_u \left(\frac{r_o}{r}\right)^2 \quad (1)$$

und innerhalb des Kreises

$$\sigma_t(r) = \sigma_r(r) = \frac{1+\nu}{2} p_u = \beta \cdot p_u \quad (2)$$

#### 2.2 Ermittlung der Spannungen wenn die Belastung am Innenrand angreift

Nun denken wir uns die Scheibe (Abb. 2) eingebettet in eine unendliche Scheibe. An den Berandungen A und B bringen wir eine fiktive Kräftebelegung  $p_a^*$  und  $p_b^*$  so an, daß an diesen Berandungen in der unendlichen Scheibe die gleichen Randspannungen herrschen wie an der reellen Scheibe.

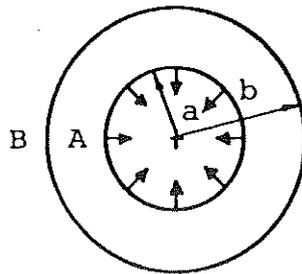


Abb. 2

Am Innenrand müssen sich die Einflüsse der fiktiven Kräfte in radialer Richtung aufheben, so daß dort als radiale Spannungen die Kräftebelegung  $p$  bleibt. Da wir die Kräftebelegung  $p$  auch in die unendliche Scheibe eingebettet haben, müssen wir sie durch  $\alpha$  dividieren. So bekommen wir für den Innenrand

$$p_a^* \alpha + p_b^* \cdot \beta = 0 \quad (3)$$

Am Außenrand müssen die fiktiven Kräfte die Radialspannungen, die durch die Belegung  $p/\alpha$  verursacht werden, aufheben.

$$p_a^* \alpha \left(\frac{a}{b}\right)^2 + p_b^* \beta = - \frac{p}{\alpha} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad (4)$$

Aus (3) und (4) bekommen wir

$$p_a^* = \frac{p}{\alpha} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \quad \text{und} \quad p_b^* = - \frac{p}{\beta} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \quad (5)$$

Der gesuchte Verlauf der Radialspannungen ist

$$\sigma_r(r) = \frac{p}{\alpha} \left(\frac{a}{r}\right)^2 + p_a^* \alpha \left(\frac{a}{r}\right)^2 + p_b^* \cdot \beta \quad (6)$$

Durch das Einsetzen von (5) bekommen wir

$$\sigma_r(r) = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2 - r^2}{r^2} \quad (7)$$

Den Verlauf der Tangentialspannungen bekommen wir analog:

$$\sigma_t(r) = - \frac{p}{\alpha} \left(\frac{a}{r}\right)^2 - p_a^* \alpha \left(\frac{a}{r}\right)^2 + p_b^* \beta \quad (8)$$

Durch das Einsetzen von (5) bekommen wir

$$\sigma_t(r) = - p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2 + r^2}{r^2}$$

Wie man sieht, verschwindet der Einfluß der Querdehnungszahl  $\nu$ .

### 2.3 Ermittlung der Spannungen, wenn die Belastung am Außenrand angreift

Die Berechnung erfolgt analog derer, die unter 1. durchgeführt wurde. Die zwei Gleichungen für das Berechnen der fiktiven Kräftebelegung werden lauten:

$$\text{a) für den Innenrand} \quad p_a^* \alpha + p_b^* \beta = - p \cdot \beta \quad (10)$$

$$\text{b) für den Außenrand} \quad p_a^* \alpha \left(\frac{a}{b}\right)^2 + p_b^* \beta = 0 \quad (11)$$

Das Bestimmen von  $\sigma_r(r)$  und  $\sigma_t(r)$  erfolgt analog wie unter 2.2

## 3. Dickwandiges Rohr - Wärmespannungen

### 3.1 Grundlagen

Eine im Punkt C einer unendlichen Scheibe wirkende Wärmequelle der Ergiebigkeit Q verursacht in einer Entfernung  $r_p$  folgende Temperatur in Spannungen:

$$T(p) = - \frac{Q}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_p}{r_o} \quad (12)$$

$$\sigma_r(p) = - \frac{E\alpha Q}{8\pi\lambda} \left(- 2 \ln \frac{r_p}{r_o} + 1\right) \quad (13)$$

$$\sigma_t(p) = - \frac{E\alpha Q}{8\pi\lambda} \left(- 2 \ln \frac{r_p}{r_o} - 1\right) \quad (14)$$

wobei  $E$  - Elastizitätsmodul  
 $\lambda$  - Wärmeleitfähigkeit  
 $\alpha$  - Wärmeausdehnungskoeffizient  
 $r_o$  - Längeneinheit

ist.

### 3.2 Ermittlung der Spannungen bei unterschiedlicher Temperatur am Innen- und Außenrand

$$\text{Aus 12} \quad Q = \frac{(T_a - T_b) 2\pi\lambda}{\ln \frac{b}{a}} \quad (15)$$

Radialspannungen an den Berandungen in der unendlichen Scheibe:

$$\sigma_{rQ}(A) = - \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{4 \ln \frac{b}{a}} \left(- 2 \ln \frac{a}{r_o} + 1\right)$$

$$\sigma_{rQ}(B) = - \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{4 \ln \frac{b}{a}} \left(- 2 \ln \frac{b}{r_o} + 1\right)$$

Für die Randbedingungen  $\sigma_r(A) = \sigma_r(B) = 0$  bekommen wir zwei Gleichungen. Da der Einfluß der Querkontraktion verschwindet, können wir schreiben:

$$p_a^* + p_b^* = - \sigma_{rQ}(A) \quad (18)$$

$$p_a^* \left(\frac{a}{b}\right)^2 + p_b^* = - \sigma_{rQ}(B) \quad (19)$$

Durch das Ermitteln von  $p_a^*$  und  $p_b^*$  aus (18) und (19) und das Einsetzen in (20) und (21) bekommen wir die tangentiale und radiale Spannungsverteilung.

$$\sigma_r(r) = \sigma_{rQ}(r) + p_a^* \left(\frac{a}{r}\right)^2 + p_b^* \quad (20)$$

$$\sigma_t(r) = \sigma_{rt}(r) - p_a^* \left(\frac{a}{r}\right)^2 + p_b^* \quad (21)$$

$$\sigma_r(r) = \frac{-E\alpha(T_a - T_b)}{2} \left| \frac{\ln \frac{a}{r}}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \frac{r^2 - a^2}{r^2} \right|$$

$$\sigma_t(r) = \frac{-E\alpha(T_a - T_b)}{2} \left| \frac{\ln \frac{a}{r}}{\ln \frac{b}{a}} - \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \frac{a^2 + r^2}{r^2} \right|$$

Nach dem gleichen Prinzip können auch Wärmespannungen infolge instationärer Temperaturfelder berechnet werden.

#### Literatur

- |1| KUSKE, A.: Spannungen in Scheiben - Zeichnerisches Verfahren; Technische Rundschau Nr. 46, 1975 und Nr. 5, 1976
- |2| FÖPPL: Drang und Zwang, Leibniz-Verlag München, 1947
- |3| DIRLEWANGER, H.: Beiträge zur Spannungsermittlung mit Singularitätenverfahren, Diss. TU Clausthal, 1972

## Spannungsoptische Untersuchung eines Radialverdichterrades mit genieteteter Deckscheibe

Dipl.-Ing. W. Boll

### 1. Problemstellung: Leistungssteigerung von Radialverdichtern

Die an Radialverdichtern zur Zeit üblichen Umfangsgeschwindigkeiten stellen noch nicht die Grenze des gasdynamisch Möglichen dar. Zur Leistungssteigerung bemüht man sich deshalb, die Drehzahl heraufzusetzen. Hierbei ergeben sich Festigkeitsprobleme, da die Fliehkräfte mit dem Quadrat der Drehzahl steigen.

Unter Berücksichtigung strömungsmechanischer wie fertigungstechnischer Gesichtspunkte sollte eine Läuferform gefunden werden, die den mechanischen Belastungen standhält.

Zur Zeit konkurrieren zwei Bauformen miteinander.

- a) das in einem Stück gegossene Verdichterrad
- b) das Verdichterrad bestehend aus Radkörper mit angegossenen Schaufeln und aufgenieteteter Deckscheibe

### 2. Spannungsoptisches Untersuchungsverfahren

Am Institut für Maschinenwesen der TU Clausthal wurden zwei spannungsoptische Modelle von Radialverdichterrädern der Bauform a) und b), sonst aber gleicher Abmessungen erstellt. Die Räder wurden nach dem "Einfrierverfahren" belastet, indem sie auf einem dafür konstruierten Prüfstand erwärmt, geschleudert und unter Schleuderlast langsam wieder abgekühlt wurden. Im erkalteten Zustand waren die Dehnungen- und damit die spannungsoptischen Effekte - eingefroren.

Die Modelle wurden anschließend in Schnitte verschiedener Richtung zerlegt und spannungsoptisch ausgewertet

### 3. Ähnlichkeitsbeziehungen für Gas- und Fliehkräfte

Für die Übertragung vom Modell auf die Hauptausführung sind die speziellen Ähnlichkeitsgesetze anzuwenden.

Am Laufrad entstehen Spannungen durch Fliehkräfte, Gaskräfte und örtlich ungleiche Erwärmung durch Kompression des Gases.

Wärmespannungen lassen sich mit dem Einfrierverfahren nicht erfassen, da während des Einfriervorganges keine nennenswerten Temperaturgefälle im Bauteil herrschen dürfen.

Gaskräfte erzeugen in der Radscheibe im allgemeinen nur unwesentliche Spannungen. Lediglich auf die Biegespannungen in den Schaufeln - sofern es sich um dünne Schaufeln handelt - haben sie einen Einfluß. Die Ähnlichkeitsbeziehung für Materialspannungen durch Gasdrücke lautet:

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_M} = \frac{p_H}{p_M} = \frac{\rho_H}{\rho_M} \cdot \left(\frac{\omega_H}{\omega_M}\right)^2 \left(\frac{\ell_H}{\ell_M}\right)^2 \quad (1)$$

- $\sigma$  - Materialspannung
- $p$  - Gasdruck
- $\rho$  - Dichte des Gases
- $\omega$  - Winkelgeschwindigkeit
- $\ell$  - Durchmesser
- Index H- Hauptausführung
- Index M- Modellausführung

Die Machzahl und die Reynoldszahl, die bei Strömungsvorgängen betrachtet werden, sind in Gl. (1) nicht berücksichtigt und lassen sich mit ihr auch nicht in Einklang bringen. Eine strenge Ähnlichkeit bezüglich der Gaskräfte existiert daher nicht.

Ähnlichkeitsbedingung für die Machzahl:

$$\frac{\omega_H}{\omega_M} = \frac{\ell_M}{\ell_H} \cdot \frac{c_H}{c_M}$$

Ähnlichkeitsbedingung für die Reynoldszahl:

$$\frac{\omega_H}{\omega_M} = \frac{\ell_M}{\ell_H} \cdot \frac{\rho_M}{\rho_H} \cdot \frac{\eta_H}{\eta_M}$$

c - Schallgeschwindigkeit

ℓ - Durchmesser

η - dyn. Zähigkeit

Für den Maßstab der Spannungen durch Fliehkräfte gilt die Beziehung:

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_M} = \left(\frac{\omega_H}{\omega_M}\right)^2 \cdot \left(\frac{\ell_H}{\ell_M}\right)^2 \cdot \frac{\bar{\rho}_H}{\bar{\rho}_M} \quad (2)$$

$\bar{\rho}$  - Werkstoffdichte

Dieses Gesetz besitzt den dominierenden Einfluß auf die Laufradspannungen; will man die Gaskräfte ebenfalls berücksichtigen, so gilt, daß das Verhältnis der Spannungen aus Gaskräften zu den Spannungen aus Fliehkräften in Modell und Hauptausführung gleich sein muß.

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_G \\ \sigma_Z \end{matrix} \right\}_M = \left\{ \begin{matrix} \sigma_G \\ \sigma_Z \end{matrix} \right\}_H$$

Index G - Gaskraft

Index Z - Fliehkraft

$$\text{oder } \left\{ \begin{matrix} \sigma_H \\ \sigma_M \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} \sigma_H \\ \sigma_M \end{matrix} \right\}_Z$$

Mit den Gl. (1) und (2) kann man dann schreiben:

$$\frac{\rho_H}{\rho_M} \cdot \left(\frac{\ell_H}{\ell_M}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_H}{\omega_M}\right)^2 = \frac{\bar{\rho}_H}{\bar{\rho}_M} \cdot \left(\frac{\ell_H}{\ell_M}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_H}{\omega_M}\right)^2$$

$$\text{oder } \frac{\rho_H}{\rho_M} = \frac{\bar{\rho}_H}{\bar{\rho}_M}$$

Zur Erzeugung der Ähnlichkeit zwischen Gas- und Fliehkräften muß daher das Verhältnis der Gasdichten entsprechend festgelegt werden. Die Gasdichte im Modell läßt sich durch den Druck und die Gaszusammensetzung auf den erforderlichen Wert bringen (die Temperatur dagegen liegt versuchsbedingt bei 120° C fest); z.B. die Verwendung von reinem Helium statt Luft ergibt  $\rho_H/\rho_M = 7$  bei gleichem Druck in Modell- und Hauptausführung. Welche der Maßnahmen die günstigere ist, hängt von den Abmessungen und Kosten ab.

Die vorliegende Untersuchung wurde bei Atmosphärendruck im Maßstab 1:1 durchgeführt, was bei einem Verhältnis der Werkstoffdichten  $\bar{\rho}_M/\bar{\rho}_M = 1/6$  zu einem Verdichtereintrittsdruck von 6 bar bei 400 K führt - ein Zustand, der bei Radialverdichtern auftritt, die als letzte Stufe hinter mehrere Axialverdichter gelegt werden.

Ähnlichkeit zwischen den Materialspannungen in Modell- und Hauptausführung existiert nur, wenn der Werkstoff in der Hauptausführung im linear elastischen Bereich belastet wird.

#### 4. Ergebnisse

Die spannungsoptischen Bilder der Modellschnitte liefern die sekundären Hauptnormalspannungsdifferenzen. Wählt man die Schnittebene so, daß die Richtung des durchstrahlenden Lichtes mit einer Hauptspannungsrichtung zusammenfällt, erhält man die primären Hauptnormalspannungsdifferenzen in der Ebene der beiden anderen Hauptnormalspannungsrichtungen z. B. beim Radialschnitt eines rotationssymmetrischen Körpers.

Es gilt dort, wenn  $\sigma_3$  in Blickrichtung liegt:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n S}{d}$$

$\sigma_{1,2}$	$ N/mm^2 $	- Hauptnormalspannungen
$n$	$ 1 $	- Interferenzordnung
$S$	$ N/mm $	- spannungsoptische Konstante
$d$	$ mm $	- Schnittdicke

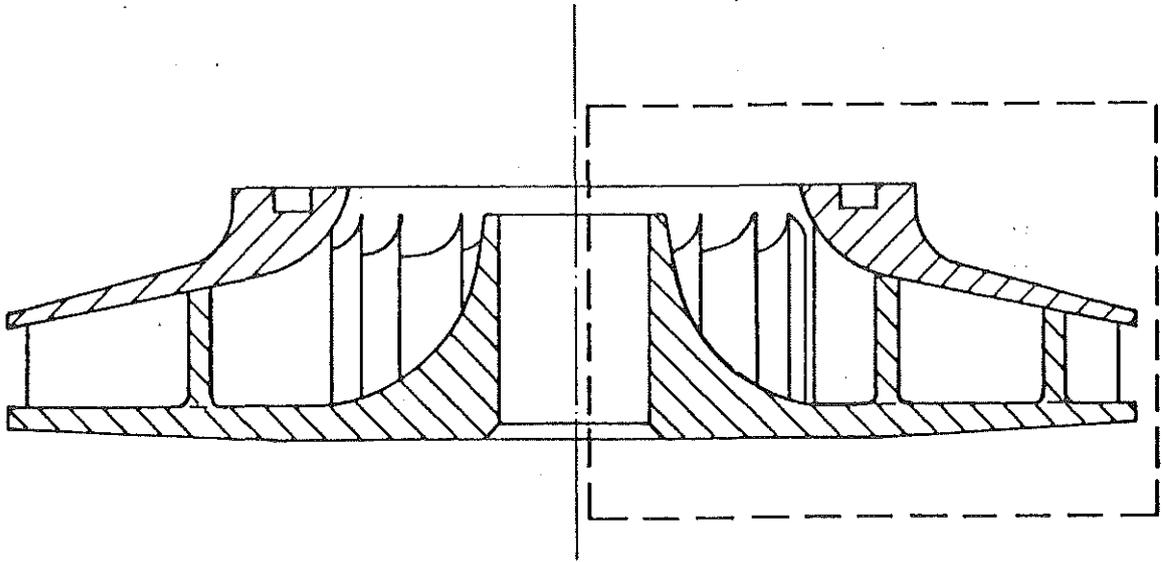
Dort, wo auf die Randzonen des Bauteils keine äußeren Lasten wirken, gilt:  $\sigma_2 = 0$ ; und es folgt

$$\sigma_1 = \frac{n S}{d}$$

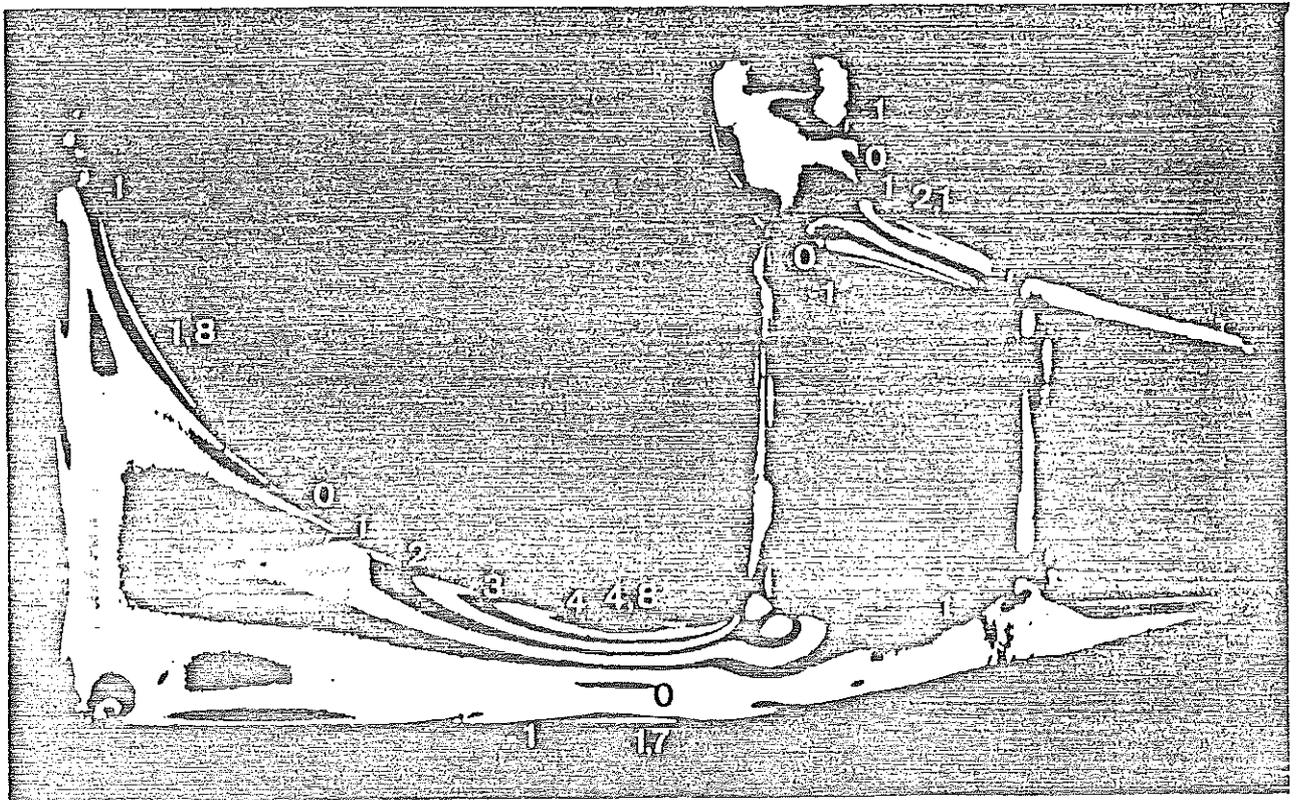
Dieser Fall findet Anwendung für den abgebildeten Radialschnitt. Die Zahlenwerte stellen die Isochromatenordnungen (Interferenzordnungen des durchtretenden Lichtes) dar; sie sind am Rande der in radial-axialer Richtungen liegenden Hauptspannung direkt proportional.

Aus dem Bild geht u.a. hervor, daß sich in der Radscheibe in der Nähe der Eintrittskante die Zugspannungen in radialer Richtung, herrührend aus den Fliehkräften der Radscheibe, mit den Biegespannungen aus den Schaufelspannungsmomenten überlagern. Die maximale Zugspannung liegt auf der Radscheibeninnenseite während an der Außenseite eine leichte Druckspannung herrscht.

Die Einzelauswertung weiterer Schnitte hat Aufschluß über die Spannungs-Dehnungsverhältnisse gegeben und Möglichkeiten einer Formoptimierung aufgezeigt.



Skizze des Laufradquerschnitts mit Bildausschnitt



Radialschnitt des Laufrades mit aufgenieteteter Deckscheibe