## Simulation von hoch belasteten Druckkammlagerungen

Heinrich, C.; Lohrengel, A.

Das thermo-elastohydrodynamische Druckkammsimulationsprogramm des IMW berechnet Druckkammlagerungen unter hoher Last bei Berücksichtigung der Thermik und der Plattensteifigkeit.

The IMW's thermo-elastohydrodynamic thrust collar

simulation program can be used to dimension thrust collars at high load and with regard to thermals and plate stiffness.

### Einleitung

Das am IMW zur Druckkammberechnung entwickelte Simulationsprogramm wurde zuletzt in /1/ ausführlich beschrieben. Zur Untersuchung von bisher unberücksichtigten Einflüssen sowie deutlich höheren Leistungsdichten wurden umfangreiche Änderungen bzw. Erweiterungen durchgeführt, welche im Folgenden gemeinsam mit dem restlichen Ablauf umrissen werden sollen. Ziel der Simulation ist, Schmierspalthöhen, Druck- und Temperaturverteilungen sowie die Verlustleistung für beliebige Geometrien und Lastsituationen zu ermitteln.

Die primären geometrischen Druckkamm-Auslegungsparameter sind die Überdeckung o, der Kegelwinkel  $\delta$  und die Profilform, z. B. bei einer Kreisbogenprofilierung der Bombierradius  $r_B$ , sowie die Plattendicke t (Abbildung 1). Herausforderung ist, die Überdeckung o so klein wie möglich zu wählen, um noch schadensfrei ertragbare Schmierspalthöhen zu erreichen, während gleichzeitig die Verlustleistung minimiert wird, welche bei höherem Schlupf mit wachsender mittlerer Entfernung des Kontaktgebiets vom Verzahnungswälzkreis steigt.



Abbildung 1: Geometrische Größen am Druckkamm. Überzeichnete Darstellung.





Abbildung 2: normierte Parameterstudie

Es existiert bzgl. der Verlustleistung ein ausgeprägtes Überdeckungsoptimum; darüber ist der Zusammenhang zwischen Verlustleistung und Überdeckung näherungsweise linear. Die Schmierspalthöhe sinkt; der Druck steigt mit kleinerer Überdeckung. Ebenfalls existieren ausgeprägte Kegelwinkeloptima, deren Einfluss weniger stark als derjenige der Überdeckung ist (Abbildung 2).

Durch kleinere Überdeckungen bewirkte höhere Leistungsdichten, welche zu einem voll ausgebildetem elastohydrodynamischen (EHD) Parallelspalt führen, sind numerisch komplexer zu berechnen, weshalb verglichen mit /1/ eine andere Druckberechnungsfunktion eingesetzt werden muss.

In mobilen Anwendungen sollten die Druckkämme zum Zwecke des Leichtbaus möglichst wenig axialen Bauraum benötigen, d. h. geringe Plattendicken *t* besitzen. Die dann stärker ausgeprägte Plattenbiegung bedeutet eine mögliche Schiefstellung der Laufflächen zueinander, welche rechnerisch berücksichtigt werden muss. Bei dünnen Platten stellt sich überdies eine andere Abplattung als bei dicken ein. Weiterhin steigt bei sinkender Laufflächenbreite der Steifigkeitseinfluss des Plattenrandes auf das Berechnungsergebnis.

Insbesondere im Mischreibungsbetrieb in vergleichsweise langsam laufenden Getrieben (bspw. für Fahrzeuge) und in sehr schnellen, voll hydrodynamisch geschmierten Turbogetrieben sollte für eine präzise Auslegung die Schmierstofferwärmung berücksichtigt werden.

Der Programmablauf ist in Abbildung 3 grob skizziert. Das Pre-Processing beginnt mit der Geometrieerzeugung.

#### Geometrieerzeugung

Die Berechnung der Feldgrößen erfolgt auf einem rechtwinkligen Gitter, auf welchem zuerst die Spalthöhenverteilung bestimmt wird, welche sich bei unverformten



Abbildung 3: Ablaufdiagramm

Laufflächen einstellt. Dazu werden die Profilhöhen von Druckkamm (DK) und Anlaufring (AR) im zweidimensionalen Schnitt als Funktion z des Radius r definiert (Abbildung 4a). Für eine "gerade" Lauffläche, d. h. ein Kegelprofil, ist dies eine einfache Dreiecksberechnung:

$$z_{\text{gerader DK}}(r) = \left(r - \frac{d_i}{2}\right) \cdot \tan \delta$$
 (1)

Weitere Profile lassen sich hier einfach als 2D-Geometriefunktionen hinterlegen. So wurde z. B. in /2/ die Übertragung von Wälzlagerprofilierungen auf Druckkämme untersucht. Schiefstellungen der Laufflächen zueinander z. B. durch Fertigungsfehler lassen sich durch Erzeugung eines Profils mit modifiziertem Kegelwinkel  $\delta$  erzeugen.

Die Profilfunktionen werden im diskretisierten Kontaktgebiet an den in Polarkoordinaten  $r, \varphi$  umgerechneten, in kartesischen Koordinaten x, y gegebenen Knoten ausgewertet (Abbildung 4b), um die dreidimensionalen Höhenprofile von Druckkamm und Anlaufring zu erhalten (Abbildung 4c). Das Gesamthöhenprofil wird durch Abziehen der Höhenprofile der beiden Kontaktpartner voneinander bestimmt (Abbildung 4d).



Abbildung 4: Geometrieerzeugungsschritte

#### Laufflächennachgiebigkeit

Zur Berücksichtigung der Laufflächendeformation werden Nachgiebigkeitsmatrizen vorberechnet. In der für EHD klassischen Variante wird die Halbraumtheorie nach BOUSSINESQ/3/ in der numerischen Lösungsweise nach /4/ eingesetzt. Während sich die Nachgiebigkeiten so ohne nennenswerten Zeitaufwand aufstellen lassen, lässt sich mit dieser Technik nicht die Biegung der Platten sowie der Randeinfluss abbilden.

Dies wird daher in einem alternativen Berechnungszweig durch Festkörper-FEM gelöst. In einer ersten, in /5/ vorgestellten Implementation, wurde dies durch Interpolation von Tragdrücken und Verformung zwischen dem beschriebenen rechtwinkligen Tribologienetz und einem komplett automatisch erstellten, und daher nicht übereinstimmendem Festkörpernetz mittels radialer Basisfunktionen umgesetzt. Für die im Folgenden eingesetzte Tragdruckberechnungsfunktion werden Nachgiebigkeiten an Nachbarknoten im Tribonetz benötigt. Diese Reaktion auf eine punktförmige Lasteinleitung lässt sich durch Interpolation nicht sinnvoll bestimmen.

Aus diesem Grund wird ein Hybridverfahren aus automatischer und manueller Vernetzung verwendet, mit welchem im Kontaktgebiet die gleiche Vernetzung auf Tribound Festkörpernetz erzielt wird. Dazu wird aus der CAD-Grundgeometrie (Abbildung 5a) das Kontaktgebiet bis in eine gewisse Tiefe ausgeschnitten (Abbildung 5b). Die so entstandene Geometrie wird automatisch vernetzt mit Vorgaben der Einteilung der Schnittflächen zur Erzeugung eines kompatiblen Übergangs ohne hängenden Knoten (Abbildung 5c, GMSH-Vernetzer /6/). Anschließend werden im ausgeschnittenen Gebiet mit einer manuell programmierten Logik Elemente hinzugefügt, die alle Knoten des Tribosimulationsnetzes beinhalten (Abbildung 5d).

Die zu diesem Netz aufgestellte FEM-Steifigkeitsmatrix wird CHOLESKY-zerlegt, und nach Aufbringen von Lagerungsbedingungen jeweils für eine Punktlast an jedem einzelnen Triboknoten gelöst. Die Laufflächenabsenkungen unter den Einheitsbelastungen werden gespeichert, so dass während der Drucklösung einfach durch Superposition der Einzelabsenkungen die Gesamtspaltverformung berechnet werden kann.



Abbildung 5: Schritte zur Erzeugung einer Plattenvernetzung mit vorgegebener Kontaktvernetzung

#### Berechnung der Druckverteilung

Der hydrodynamische Tragdruck wird durch Lösung der REYNOLDS-Differentialgleichung /7/ bestimmt:

	$\frac{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right)}{\text{Druckterm}} = \frac{1}{2}$	$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho h u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho h v)}_{\text{Geschwindigkeitsterm}}$		(2)
д	partielle Ableitung	p	Druck	
х	Koordinatenrichtung	У	Koordinatenrichtung	
ρ	Dichte	η	dynamische Viskosität	
h	Spalthöhe			

Die Schmierstoffeigenschaften Dichte und Viskosität hängen von Druck und Temperatur ab. Zum Nachrechnen von Prüfstandversuchen mit FVA-Referenzölen /8/ wird das Modell von BODE /9/ verwendet, da die Referenzöleigenschaften in dieser Form dokumentiert sind. Alternativ wird das mit weniger Koeffizienten auskommende Dichtemodell von DOWSON/HIGGINSON /10/ in Kombination mit dem Viskositätsmodell von ROELANDS /11/ verwendet.

Während die Viskosität an einem Knoten nur von dem lokalen Druck an diesem Knoten abhängt, ist die Spalthöhe eines Knotens aufgrund der Laufflächendeformation von den Drücken an allen Knoten des Kontaktgebiets abhängig. Bei (für Druckkämme hohen) Belastungen, die zu der Ausbildung eines Parallelspalts führen, in welchem die Spalthöhenableitung verschwindet, führen kleinste Änderungen der Spalthöhe zu deutlichen Druckschwankungen. Eine gedämpfte Fixpunktiteration zum Abgleich von Druck und Laufflächenverformung, wie sie in /1/ für Druckkämme, bzw. gemeinhin für Gleitlager eingesetzt wird (z. B. /12/) ist dann instabil. Zur Lösung dieses Problems wird daher eine auch bei hoher Last stabile Druckverteilungsberechnung nach VENNER/13/ eingesetzt. Das für allgemeine EHD-Punktkontakte entwickelte Verfahren muss druckkammspezifisch modifiziert werden.

Beim Druckkamm sind Geschwindigkeitskomponenten u, v in beide Raumrichtungen x, y relevant, während VENNER nur Geschwindigkeitskomponenten in eine Hauptbewegungsrichtung behandelt. Beim Druckkamm wechselt die Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung zwischen der linken und rechten Hälfte des Kontaktgebiets (Abbildung 6) das Vorzeichen. Aus numerischen Stabilitätsgründen /14/ wird der Geschwindigkeitsterm der REYNOLDS-Gleichung aufwinddifferenziert, d. h. mit Differenzenquotienten, welche nicht z. B. zentral um einen Gitterpunkt herum gebildet werden, sondern lediglich mit Punkten auf der Seite, aus welcher das Fluid heranströmt. Somit ist beim Druckkamm eine Fallunterscheidung für die Differenzierungsrichtung über das Vorzeichen der v-Geschwindigkeitskomponente notwendig.

Druckverteilungen können bei Druckkämmen aufgrund der verglichen mit der Kontaktausdehnung sehr großen Ersatzradien bis zum Rand des Kontaktgebiets gehen, während bspw. bei Kugellagern die Druckentwicklung auf einer relativ zur Kugelgröße sehr kleinen Fläche stattfindet. Um die "geometrisch bedingte Mangelschmierung" beim Druckkamm abzubilden, müssen die korrekten Randbedingungen gesetzt werden, welche nicht nur Umgebungsdruck am Kontaktgebietrand bewirken (DIRICHLET-Randbedingung), sondern auch eine 0 betragende Druckableitung (NEUMANN-Randbedingung), während bei Kugellagern nur die DIRICHLET-Randbedingung explizit benötigt wird, da sich die verschwindende Druckableitung automatisch einstellt, wenn das Berechnungsgebiet etwas über die nicht geometrisch eingeschränkte Druckausbildung hinausgehend gelegt wird.

Die ausgehend von VENNER /13/ für den Druckkamm modifizierte diskretisierte REYNOLDS-Gleichung lautet dann an einem Punkt i, j des Kontaktgebiets:

$$L_{i,j} = \underbrace{\frac{b_{w_{i,j}}\xi_{w_{i,j}}\overline{p}_{i,j-1} - b_{i,j}\left(\xi_{w_{i,j}} + b_{o_{i,j}}\xi_{o_{i,j}}\right)\overline{p}_{i,j} + \xi_{o_{i,j}}\overline{p}_{i,j+1}}{\Delta x^{2}}}_{\text{Druckterm x-Richtung}} + \underbrace{\frac{b_{n_{i,j}}\xi_{n_{i,j}}\overline{p}_{i-1,j} - b_{i,j}\left(\xi_{n_{i,j}} + \xi_{s_{i,j}}\right)\overline{p}_{i,j} + b_{s_{i,j}}\xi_{s_{i,j}}\overline{p}_{i+1,j}}}_{\text{Druckterm y-Richtung}}}_{-\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\Delta y^{2}}{Druckterm y-Richtung}}_{\text{Geschwindigkeitsterm x-Richtung}}}_{\text{Geschwindigkeitsterm x-Richtung}}$$
(3)

# mit den Koeffizienten

$\xi = \frac{\overline{\varrho}h^3}{\overline{\eta}\lambda}$	mit $\lambda = \frac{12\eta_0 a_{Hertz}}{\delta_{Hertz}^2 p_{Hertz}}$		(4)
i, j	Knotenindex	n, o. s. w	Indizierung des Nebengitters
L	Systemmatrix	b	Koeffizient für Randbedingung
ξ	Koeffizient	$\overline{p}$	dimensionsloser Druck
$\Delta x$	dimensionslose Gitterweite in x-Richtung	$\overline{\Delta v}$	dimensionslose Gitterweite in y-Richtung
Q	dimensionslose Dichte	$\overline{h}$	dimensionslose Spalthöhe
u	hydrodynamisch wirksame Geschwindig- keit in <i>x</i> -Richtung	v	hydrodynamisch wirksame Geschwindig- keit in y-Richtung
η	dimensionslose dynamische Viskosität	λ	Koeffizient
$\eta_0$	dynamische Viskosität bei Umgebungs- druck- & temperatur	$a_{_{Hertz}}$	HERTZsche Abplattungsbreite in Um- fangsrichtung
$\delta_{Hertz}$	HERTZsche Annäherung	$p_{Hertz}$	HERTZsche Pressung



Abbildung 6: Berechnungsgitter mit staggered grid

Der Druckterm wird mit zentralen Differenzen diskretisiert. Zur Vermeidung von Oszillationen ("checkerboarding", "odd-even decoupling") erfolgt die numerische Lösung auf zwei versetzten Gittern (sog. "staggered grid") /14, 15/, auf welchen die Drücke auf einem Hauptgitter und die restlichen Feldgrößen (Geschwindigkeit etc.) auf einem um eine halbe Gitterbreite versetzten Nebengitter definiert sind (Abbildung 6). Die Nebengitter-Nachbarknoten eines Hauptgitterknotens werden über die Analogie zu einer Landkarte in Draufsicht mit den Himmelsrichtungen als Nord, Ost, Süd, West bezeichnet (in Abbildung 6 grün eingezeichnet).

Die Randbedingungen werden in Gleichung 3 mit den Koeffizienten b sowie  $b_{n,o,s,w}$  umgesetzt:

$h_{1} = \int_{0}^{0}$	wenn Randelement	(5)
$v_{i,j} = 1$	sonst	(0)
(2	wenn Rand südlich	
$b_{n_{i,i}} = \{0\}$	wenn Rand nördlich	(6)
·" (1	sonst	

(analog für restliche Richtungen).

Für die DIRICHLET-Randbedingung wird weiterhin für alle Verweise auf Knoten außerhalb des Kontaktgebiets  $\xi$ , u, v = 0 eingesetzt.

Die Fallunterscheidung zur Ableitung in Stromaufwärtsrichtung abhängig vom Vorzeichen von v wird in der obigen Gleichung mit FöppL-Klammern  $\langle \cdot \rangle$  umgesetzt:

$(r) = {0}$	für $x \leq 0$	(	7)
(x) = (1)	sonst	(	• )

Aus Stabilitätsgründen wird Gleichung 3 nicht für das gesamte Kontaktgebiet auf einmal gelöst, sondern nacheinander auf einzelnen *y*-Koordinaten des Rechengitters, d. h. linienweise in Hauptbewegungsrichtung *x* (Linienrelaxation). Das Relaxations-verfahren wird weiterhin im konvergenten Spalt und im Parallelspalt von GAUß-SEIDEL- zu distributiver JACOBI-Relaxation gewechselt /13/.

Da der Inhalt der zur Diskretisierung der Reynolds-Gleichung aufgestellten Systemmatrix nichtlinear ist (in  $\xi$  und  $\overline{h}$ ), wird das Iterationsverfahren durch eine nach dem ersten Glied abgebrochene TAYLOR-Entwicklung verbessert, wozu die JACOBI-Matrix der Systemmatrix benötigt wird /13/.

Die JACOBI-Matrix wird hier nicht zur Berücksichtigung aller Einflüsse aufgestellt, sondern lediglich, um die nicht-lokalen Einflüsse in Form der Spalthöhenänderung abzubilden. Die Viskositäts- und Dichteänderung aufgrund der Druckänderung an einem bestimmten Netzknoten sind rein lokal, da sie nur an diesem Knoten Auswirkungen haben. Die Spalthöhenänderung aufgrund der Druckänderung an einem bestimmten Netzknoten hat theoretisch Auswirkungen im kompletten Kontaktgebiet, praktisch sind jedoch nur die Auswirkungen in der Nähe für die Lösungsstabilität relevant, weshalb die JACOBI-Matrix für sie begrenzt als Bandmatrix erstellt wird.

Die JACOBI-Matrix von VENNER /13/ muss druckkammspezifisch neu abgeleitet werden für die Geschwindigkeitskomponenten und Randbedingungen, und zusätzlich druckkammunspezifisch zur Berücksichtigung von unsymmetrischen Nachgiebigkeiten, was für biegsame Platten aus FEM-Modellen anstelle von Halbraumlösungen benötigt wird.

Als Startlösung für die Spalthöhenverteilung wird die Deformation im trockenen Kontakt ohne Fluiddruck zuzüglich einer kleinen minimalen Spalthöhe angenommen. Der trockene Kontakt stellt ein lineares Komplementaritätsproblem dar, welches mit dem LEMKE-Algorithmus /16, 17/ gelöst werden kann.

Nach einem Druckrelaxationssweep werden die Temperaturverteilung (folgender Abschnitt), die Viskosität und Dichte, und die Spalthöhenverteilung sowie die Starrkörperannäherung zum Erreichen einer geforderten Tragkraft aktualisiert (Abbildung 3). Diese Iterationsschleife wird durchgeführt, bis die Änderungen in einem Durchlauf unter eine bestimmte Grenze fallen.

Die Lösung der Feldgrößen erfolgt in einem Mehrgitterverfahren (Multigrid), d. h. beginnend auf einem schnell lösbaren, sehr groben und endend auf einem feinen Netz mit verwertbarem Diskretisierungsfehler. Zwischen den Netzen werden die Feldgrößen interpoliert.

#### Berechnung der Temperaturverteilung

Im Schmierstoff wird aufgrund von Scherung und Kompression Wärme generiert und über Stofftransport und Leitung in die Laufflächen abgeführt. Neben den fluidmechanischen Beiträgen können über ein Kugel-Kappen-Modell nach GREENWOOD-WILLIAMSON /18/ Reibleistungsanteile aufgrund von Festkörperkontakt im Mischreibungsgebiet berücksichtigt werden (Implementation angelehnt an /19/, detaillierte Beschreibung in /1/). Dies Temperaturverteilung kann durch Lösung der Energiedifferentialgleichung berechnet werden (z. B. /20/):

C <sub>F</sub>	$\underbrace{\varrho_F\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+v\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)}_{\text{Konvektionsterm}}-\underbrace{\lambda_F\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial^2 y}\right)}_{\text{Konduktionsterm}}=$	= Ų - zugeführte Reibleistung	$-\underbrace{(q_{DK}+q_{AR})}_{\text{Wärmestrom in Laufflächen}}$	(8)
C <sub>F</sub>	spezifische Wärmekapazität. Fluids	θ	Temperatur	
$\lambda_F$	Wärmeleitfähigkeit des Fluids	ψ	lokal zugeführte Reibleistung	
$q_{DK/AR}$	<i>q</i> <sub>DK/AR</sub> Wärmestrom in Laufflächen			

Die Energiedifferentialgleichung wird auf einem zweidimensionalen Rechengebiet gelöst, da die Wärmekonvektion im Fluid in Spalthöhenrichtung vernachlässigbar klein ist. Es wird nach SALEHIZADEH und SAKA /21/ von einer parabolischen Temperaturverteilung über der Spalthöhe ausgegangen. Die Treffsicherheit dieser verbreiteten Vereinfachung kann durch den Vergleich mit kompletten dreidimensionalen Berechnungen, z. B. in /22/, bestätigt werden. Der Wärmestrom in die Laufflächen kann durch Differenzieren des Temperaturverlaufs bestimmt werden /19/.

Die Laufflächenblitztemperaturen werden mit der Lösung für eine über eine unendliche Wärmesenke bewegten punktförmigen Wärmequelle nach JAEGER /23/ bestimmt, wobei analog zur Halbraum-Laufflächendeformation ein Fehler durch den nah liegenden Rand des Körpers entsteht.

Ein Punkt auf der Druckkammlauffläche bewegt sich auf einer Kreisbahn durch das kartesisch vernetzte Rechengebiet. Die Bahnkurve eines Gitterpunkts trifft somit nur in Sonderfällen exakt andere Knoten. Im Regelfall verläuft die Bahnkurve zwischen den anderen Knoten. Daher wird zur Bestimmung der zurückliegenden Wärmeeinträge eines Punktes linear zwischen jeweils zwei Nebengitterknoten interpoliert, zwischen denen die Trajektorie hindurch verläuft (Abbildung 7).

Das Gleichgewicht zwischen Fluid- und Laufflächentemperatur wird in einer gedämpften Fixpunktiteration gefunden.



Abbildung 7: Laufflächentemperaturberechnung über Interpolation von Trajektoriendurchgängen

#### Berechnungsbeispiel

Beispielhaft wird ein Druckkamm mit den in Tabelle 1 angegebenen Daten simuliert. Die Feldgrößenverteilungen sind in Abbildung 8 dargestellt.

Es stellt sich ein von anderen EHD-Kontakten bekannter Parallelspalt mit hufeisenförmiger Umrandung ein (Abbildung 8b). Zur besseren Darstellung ist die Spalthöhenverteilung ab einer gewissen Höhe abgeschnitten (grau gefärbt). Der Temperaturanstieg ist bei moderaten Drehzahlen sehr gering, da der Druckkamm in seiner Lage nah am Verzahnungswälzkreis einen geringen Schlupf aufweist und somit wenig temperaturerhöhende Reibleistung bewirkt.



#### Abbildung 8: Feldgrößendarstellungen Berechnungsbeispiel

#### Tabelle 1: Daten Berechnungsbeispiel

Druckkammdrehzahl	2250 min <sup>-1</sup>	Übersetzungsverhältnis	1,5	Axialkraft	3,6 kN
Druckkammaußen-ø	100 mm	Druckkamminnen-ø	30 mm	Plattendicke DK	14 mm
Anlaufringaußen-ø	99 mm	Anlaufringinnen-ø	40 mm	Plattendicke AR	14 mm
Überdeckung	5 mm	Kegelwinkel	1°	Bombierradius	500 mm
Achsabstand	91,5 mm	Schmierstoff	FVA 3	3A /8/ (v <sub>40°C</sub> =100 mm s <sup>-2</sup> )	@ 90 °C

#### Fazit

Die Weiterentwicklung des Tribosolvers aus /1/ erlaubt es, Betriebssituationen mit deutlich höheren spezifischen Belastungen als bis her zu untersuchen, was zu effizienteren Auslegungen führen kann, und Druckkämme in sehr schnell laufenden Turbogetrieben mit entsprechender Temperaturentwicklung zu berechnen. Gegenüber dem von anderen Maschinenelementen bzw. Standardkontakten (Kugel, Zylinder) bekannten Solvern sind einige druckkammspezifische Anpassungen notwendig.

#### Literatur

- /1/ Heß, M.: Einsatz von Druckkämmen zur Effizienzsteigerung von schrägverzahnten Getrieben, Dissertation TU Clausthal, 2018
- /2/ Neumann, M.; Heinrich, C. & Lohrengel, A.: TurboGetEff: Effizienzsteigerung eines Turboantriebsstrangs unter Einsatz von Druckkämmen. In: Tagungsband zur 64. Tribologie-Fachtagung, Gesellschaft für Tribologie e.V. (2023), S. 72/1-72/11
- /3/ Boussinesq, J.: Applications des potentials à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris: Gauthier-Villars, 1885
- /4/ Johnson, K. L.: Contact Mechanics: Cambridge University Press, 1987
- /5/ Heinrich, C.: Druckkammsimulation unter Berücksichtigung der Plattenund Wellensteifigkeit. In: 17. Gemeinsames Kolloquium Konstruktionstechnik. KT2019 (2019), S. 126–137
- /6/ Geuzaine, C. & Remacle, J.-F.: Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. In: International journal for numerical methods in engineering Bd. 79, Wiley Online Library (2009), Nr. 11, S. 1309–1331
- (7) Reynolds, O.: On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil. In: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Royal Society Bd. 177 (1886), S. 157–234
- /8/ Laukotka, E.: Referenzöle (FVA-Heft Nr. 660) : Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V., 2003
- /9/ Bode, B.: Modell zur Beschreibung des Fließverhaltens von Flüssigkeiten unter hohem Druck. In: Tribologie und Schmierungstechnik Bd. 36 (1989), Nr. 4, S. 182–189
- /10/ Dowson, D. & Higginson, G. R.: Elasto-hydrodynamic lubrication. Oxford; New York: Pergamon Press, 1977
- /11/ Roelands, C. J. A.: Correlational aspects of the viscosity-temperature-pressure relationship of lubricating oils, Dissertation TH Delft, 1966

- /12/ Vetter, D.; Hagemann, T. & Schwarze, H.: The Impact of Thermal Load and Turbulent Flow on Minimum Film Thickness of a Large Tilting-Pad Journal Bearing. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power Bd. 146 (2023), S. 011007/1-011007/10
- /13/ Venner, C. H. & Lubrecht, A. A.: Multilevel methods in lubrication, Tribology series. Amsterdam; New York: Elsevier, 2000
- /14/ Ferziger, J. H. & Peric, M.: Numerische Strömungsmechanik. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008
- /15/ Harlow, F. H. & Welch, J. E.: Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. In: The Physics of Fluids Bd. 8 (1965), Nr. 12, S. 2182–2189
- /16/ Lemke, C. E. & Howson, Jr., J. T.: Equilibrium Points of Bimatrix Games. In: Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Bd. 12, Society for Industrial and Applied Mathematics (1964), Nr. 2, S. 413–423
- /17/ Lemke, C. E.: Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming. In: Management Science Bd. 11 (1965), Nr. 7, S. 681–689
- /18/ Greenwood, J. A. & Williamson, J. B. P.: Contact of Nominally Flat Surfaces. In: Proceedings of the Royal Society of London (A) Bd. 295 (1966), S. 300–319
- /19/ Wiersch, P.: Berechnung thermo-elastohydrodynamischer Kontakte bei Mischreibung, Dissertation TU Clausthal, 2005
- /20/ Bartel, D.: Simulation von Tribosystemen: Grundlagen und Anwendungen. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2010
- /21/ Salehizadeh, H. & Saka, N.: Thermal Non-Newtonian Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling Line Contacts. In: Journal of Tribology Bd. 113 (1991), Nr. 3, S. 481–491
- /22/ Kim, K.-H. & Sadeghi, F.: Three-Dimensional Temperature Distribution in EHD Lubrication: Part II—Point Contact and Numerical Formulation. In: Journal of Tribology Bd. 115 (1993), Nr. 1, S. 36–45
- /23/ Jaeger, J. C.: Moving sources of heat and the temperature at sliding contacts. In: Journal and proceedings of the Royal Society of New South Wales Bd. 76 (1943), Nr. 3, S. 203–224