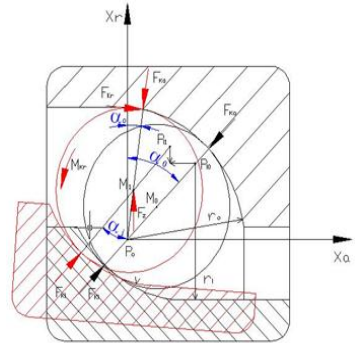


# Gewählte Wälzlagermodelle für Bestimmung von Lagersteifigkeit und Lagerdämpfung

Kruk, R.



Bei der Simulation und Berechnung des akustischen Verhaltens von neu konstruierten Anlagen, wo wälzgelagerte rotierende Wellen vorkommen sind die mathematische Modelle von Wälzlager notwendig. In diesem Artikel werden gewählte mathematische Modelle von Wälzlager für die Berechnung von Steifigkeiten und Dämpfungen präsentiert.

Occur in the simulation and calculation of the acoustic behavior of newly constructed plants, where the rolling bearing rotating shafts mathematical models of rolling bearings are necessary. In this article, selected mathematical models for the calculation of bearing stiffness and damping are presented.

## 1 Einleitung

Das dynamische Verhalten von physikalischen Systemen kann durch die Gleichung (1.1) beschrieben werden. Dieses Gleichungssystem bildet ein mathematisches Modell, das aus mehreren Parameter besteht.

$$[M ]\{\ddot{x}(t)\} + [C ]\{\dot{x}(t)\} + [K ]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad 1.1$$

Der erste Parameter  $[M]$  ist eine Massenmatrix, wo die Massen oder Trägheitsmomente des modellierten Systems enthalten sind. Die Parameter  $[C]$  und  $[K]$  stehen für Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix. Die Dämpfung wird als Umwandlung einer mechanischen Schwingung in andere Energieform. Die K-Matrix steht für Steifigkeit, die als Widerstand gegen Verformung durch eine Kraft oder Moment ausgedrückt werden kann. Die beiden Matrizen bestehen aus den Koeffizienten in betrachteten Bewegungsrichtungen (Freiheitsgraden). Der dynamische Kraftvektor ist hier mit  $\{f\}$  bezeichnet. Der Vektor  $\{x\}$  steht für Verschiebung. Neben dem Verschiebungsvektor sind Vektoren mit erster Ableitung – Schwinggeschwindigkeit  $\{\dot{x}\}$  und zweiter Ableitung – Beschleunigung  $\{\ddot{x}\}$ . Bei der Definition von diesen Para-

metern werden bestimmte Annahmen definiert und mathematische Modelle zusammengestellt. Dies kann wie bei Wälzlagermodellen sehr komplex sein. In der Literatur findet man viele Berechnungsmodelle von Wälzlager, die für Ermittlung von Steifigkeiten und Dämpfung geeignet sind. Das genauere Modell des physikalischen Systems ermöglicht Erzielung von Ergebnisse, die die Realität sehr nah liegen. Die komplexen Systeme wie Wälzlager können abhängig von der Form, dem Einsatzbereich oder der Betriebsart unterschiedlich detailliert modelliert werden. Hier werden insgesamt drei Modelle präsentiert.

## 2 Wälzlagermodelle

### Model nach Singh/Lim

Als erstes Modell wird hier Modell von Singh/Lim kurz präsentiert. Die ausführlichen Informationen können aus /3/ entnommen werden. Singh rechnet die Steifigkeiten aus den auf dem Wälzlager wirkenden Kräften sowie Momenten aus. Das Modell benötigt die radiale Verschiebung des Lagers für die Hertzschen Kontakt Bestimmung. Die Formel für die Bestimmung von Steifigkeitsmatrix eines Wälzlagers.

$$[K]_{bm} = \begin{bmatrix} k_{bxx} & k_{bxy} & k_{bxz} & k_{bx\theta_x} & k_{bx\theta_y} & 0 \\ & k_{byy} & k_{byz} & k_{by\theta_x} & k_{by\theta_y} & 0 \\ & & k_{bzz} & k_{bz\theta_x} & k_{bz\theta_y} & 0 \\ & & & k_{b\theta_x\theta_x} & k_{b\theta_x\theta_y} & 0 \\ & & & & k_{b\theta_y\theta_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.1$$

Singh definierte die Koeffizienten wie folgt:

$k_{bxx}$ ,  $k_{byy}$ ,  $k_{bzz}$  – Steifigkeiten in Achsrichtungen

$k_{bzx}$ ,  $k_{bxy}$ ,  $k_{byz}$  – Biegesteifigkeiten in Achsrichtungen

$k_{b\theta_x\theta_x}$ ,  $k_{b\theta_y\theta_y}$ ,  $k_{b\theta_z\theta_z}$  – Torsionssteifigkeit, Verkippung um Achse

$k_{b\theta_x\theta_y}$ ,  $k_{b\theta_y\theta_x}$ ,  $k_{b\theta_z\theta_z}$  – Biegesteifigkeit mit Verkippung um Achse

$$[C] = \sigma [K]_{bm} \quad 2.2$$

Die Dämpfungsmatrix stellt hier Dissipationsmechanismus im Wälzlager und ist proportional zur Steifigkeitsmatrix. Der Proportionalitätsfaktor wird durch den Autor Rayleigh- Dämpfungskonstante  $\sigma$  genannt.

## Model nach Richter

Als nächstes wird hier das Modell von Richter /2/ präsentiert. In diesem Modell werden die auf Lager wirkende Kräfte und Momente berücksichtigt. Das Wälzelement mit Masse und darauf wirkenden Fliehkräften und Kreiselmomente abgebildet. Neben Hertzchen Kontaktkräften wird hier Verschiebung in Folge des Schmierfilmes (EHD – Elastohydrodynamik) simuliert, die auf Verformung der Kontaktflächen beeinflusst. Für die Bestimmung der EHD wird ein Plattenmodell angewendet, die den Verlauf des Schmierfilmes als konstant über definiert Fläche abbildet. Hier wird die Dämpfung in der Einlaufzone des EHD Kontaktes vernachlässigt. Die Einspannbedingungen werden für die Schmierfilmmodellierung nicht angewendet. Für die Berechnung der Gesamtlagersteifigkeit  $k_m$  und Gesamtlagerdämpfung  $d_m$  werden Schmiersteifigkeit  $k_{pl}$  und Schmierdämpfung  $d_{pl}$  für die Innen- und Außenringkontakt wie in der Gleichung 2.3 und 2.4 zusammengestellt. Wobei  $F_{Stat}$  die statische radiale Last und  $\Delta y$  Verschiebung des Lagers in Folge der statischen Last sind.

$$k_m = \frac{1}{\frac{1}{k_{pl,i}} + \frac{1}{k_{pl,o}}} + \frac{F_{Stat}}{\Delta y} \quad 2.3$$

$$d_m = \frac{1}{\frac{1}{d_{pl,i}} + \frac{1}{d_{pl,o}}} \quad 2.4$$

Die Formel 2.5 und 2.6 stellen die beiden Schmierfilmparameter vor.

$$k_{pl} = E_{öl} \frac{l}{h} \left( 2b - \sqrt{\frac{2}{\gamma_3}} \gamma_4 \right) \quad 2.5$$

$$d_{pl} = E_{öl} \frac{l}{h} \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\gamma_3}} \gamma_5 \quad 2.6$$

$$\gamma_3 = 12 \frac{\eta \omega}{h^2 E_{öl}} \quad 2.7$$

$$\gamma_4 = \frac{\tanh \gamma_6 \cos^{-2} \gamma_6 + \tan \gamma_6 \cosh^{-2} \gamma_6}{1 + \tanh^2 \gamma_6 \tan^2 \gamma_6} \quad 2.8$$

$$\gamma_5 = \frac{\tanh \gamma_6 \cos^{-2} \gamma_6 - \tan \gamma_6 \cosh^{-2} \gamma_6}{1 + \tanh^2 \gamma_6 \tan^2 \gamma_6} \quad 2.9$$

$$\gamma_6 = \frac{2b}{2} \sqrt{\frac{\gamma_3}{2}} \quad 2.10$$

$E_{öl}$  steht für Kompressionsmodul des Öls. Die  $l$  und  $b$  wurden aus dem Plattenmodell der EHD abgelesen und  $h$  steht für iterativ berechnete Schmierfilmdicke. Die Schmierfilmdicke ist Last und Drehzahlabhängig und wird in diesem Modell für jedes belastetes Wälzelement ermittelt. Der Parameter  $\gamma_3$  ist eine Abkürzung, die in Nenner eine Multiplikation von dynamische Viskosität und Kreisfrequenz sowie in Zähler eine Multiplikation von Schmierfilmdicke zum Quadrat mit dem Kompressionsmodul enthält, vgl. Formel 2.7. Die Abkürzungen  $\gamma_4$  sowie  $\gamma_5$  fassen die trigonometrische Zusammenhänge aus der angewendete hier Plattenmodell. Detaillierte Erläuterungen für das Modell und iterative Berechnung von Parametern sind in /2/ zu finden.

### Model nach Dietl

Das Wälzlagermodell vom Dietl /1/ geht neben den Herz'schen Zusammenhängen auch die elastohydrodynamische Problematik im Wälzkontakt. Es werden hier neben Wälzelementverformungen und Druckverteilung dazu Zonen des Schmierfilms betrachtet, vgl. Abbildung 1. Die Steifigkeit und Dämpfung werden nach iterative Lösung von zusammengestellten Gleichungen in Abhängigkeit von Parametern wie: Geometrie, Werkstoff, Kontaktart, Last, Frequenz, Drehzahl, Betriebstemperatur und Schmierbedingungen erfasst.

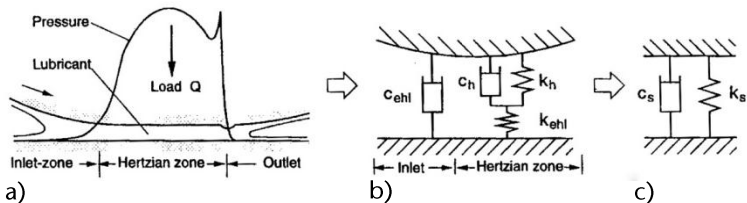


Abbildung 1: Wälzkontaktmodell nach Dietl /1/, a) Inlet – Einlaufzone, Herzian zone – Hochdruckzone, Outlet – Auslaufzone, b) dynamisches Modell des Wälzlagerkontakts, c) Ersatzparameter des Kontaktes

Das Modell bildet Einlauf- und Hochdruckzone im Wälzlagerkontakt ab. Die Auslaufzone wird vernachlässigt. Diese Parameter werden wie auf der Abbildung 1 zusammengeschaltet und daraus Ersatzsteifigkeit und Ersatzdämpfung für geschmierten Wälzlagerkontakt ermittelt.

Die Abbildung 2 stellt die Ersatzparameter für Innen- und Außenring vor. Diese Ersatzsteifigkeiten sowie Ersatzdämpfungen bilden weitere Ersatzparameter für jeden Wälzlagerkontakt im modellierten Wälzlager.

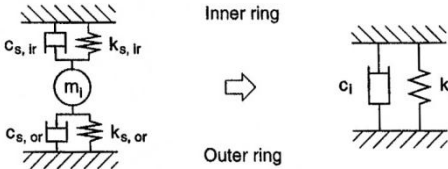


Abbildung 2: Äquivalente Parameter für Wälzkontaktmodell zwischen Innen- und Außenring für i-ten Wälzelement nach Dietl /1/, wobei  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $n$  – Anzahl der Wälzelementen

$$k_h = \frac{\partial Q}{\partial \delta} = n C_\delta^n Q^{\frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}} \tag{2.11}$$

$$c_h = \psi \frac{k_h}{2\pi f} = \frac{E_D}{2\pi E_S} \frac{k_h}{2\pi f} \tag{2.12}$$

$$k_{ehl} = \frac{\partial Q}{\partial h_{cp}} = -\frac{1}{m} C_{ehl}^{-m} Q^{m+1} \tag{2.13}$$

$$c_{ehl} = \frac{2}{\pi} \sqrt{m_{masse}^2 (2\pi f)^2} \delta_{\log dek} = 4 \cdot m_{masse} \cdot f \cdot \delta_{\log dek} \tag{2.14}$$

$$k_s \approx k_h \quad \text{und} \quad c_s \approx c_h + c_{ehl} \tag{2.15}$$

$$k_i \cong \frac{1}{4} (k_{s,ir} + k_{s,or}) \quad \text{und} \quad c_i \cong \frac{1}{4} (c_{s,ir} + c_{s,or}) \tag{2.16}$$

Die Formel 2.11 stellt die Steifigkeit im Hertzschen Kontakt und kann als partielle Ableitung der Kraft im Hertzschen Kontakt von der Hertzschen Verformung beschrieben werden. Der Parameter  $n$  ist hier als Exponent zu verstehen und ist von Art des Kontaktes (Punkt- oder Linienkontakt) abhängig. Die Konstante  $C_\delta$  steht für Hertzschen Federkonstante. In der Formel 2.12 steht  $\psi$  für Verlustfaktor, der durch Verhältnis von Energiedissipation pro einen Lastwechsel zur Verschiebungsenergie definiert wird. Für die Berechnung der äquivalenten Materialdämpfungs-konstante werden hier zusätzlich die Federkonstante aus der Formel 2.11 und harmonische Schwingungsfrequenz  $f$

benötigt. Die Schmierfilmsteifigkeit (vgl. Formel 2.13) ist als partielle Ableitung von der Last und Schmierfilmdicke im zentralen Punkt des Filmdickes (vgl. /1/), wobei  $C_{ehl}$  geschwindigkeits-, schmierbedingungs- und kontaktabhängige Faktor und  $m$  Exponent in der Größenordnung von 0.1 in Abhängigkeit von Kontaktlast sind. Die Bestimmung der äquivalenten Schmierfilmdämpfung  $c_{ehl}$  (Formel 2.14) wurde anhand logartmischen Dekrements  $\delta_{\log dek}$  also aus Steifigkeit und Wälzelementmasse  $m_{masse}$  durchgeführt. Im Modell nach Dietl werden die Steifigkeit  $k_s$  und Dämpfung  $c_s$  durch Kelvin-Voigt Elemente zusammengeführt und man erhält die Formel 2.15 für einzelnen EHD Kontakt. Die dargestellten Parameter in Abbildung 2 für Innen- (ir) und Außenring (or) in stationären Zustand können wieder mit dem Kelvin-Voigt-Modell reduziert werden. Als Ergebnis bekommt man Wälzelementkoeffizienten  $k_i$  und  $c_i$ .

### 3 Zusammenfassung

In der Literatur findet man mathematische Modelle für die Berechnung von Lagersteifigkeit und Lagerdämpfung. Die Modelle sind sehr komplex und die Lösung wird nach mehreren iterativen Schleifen erzielt. Für die Berechnung werden exakte Daten über Schmierstoff (Viskosität), Werkstoff, Geometrie und Art des modellierten Wälzlagers. Für die Bestimmung von Äquivalentlagersteifigkeit und Äquivalentlagerdämpfung eignet sich das Kelvin-Voigt-Modell, indem die Steifigkeit und die Dämpfung parallel geschaltet sind.

Für die genauere Berechnung wird die Literatur empfohlen, wo die Modelle detailliert erläutert wurden.

### 4 Literatur

- /1/ Dietl, P.: Damping and stiffness characteristics of rolling element bearings. Theory and experiment. Wien, Techn. Univ., Diss., 1997.
- /2/ Richter, H. P.: Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Körperschalleitung von Wälzlagern in Maschinen. Techn. Hochschule, Darmstadt.
- /3/ Singh, R.; Lim, T. C.: Vibration transmission through rolling element bearings in geared rotor systems. Ohio, Univ; United States, Washington, DC.
- /4/ Opehy, Lothar (1986): Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften vorgespannter Schrägkugellager. Als Ms. gedr. Düsseldorf: VDI-Verlag (Produktionstechnik / WZL, 138).