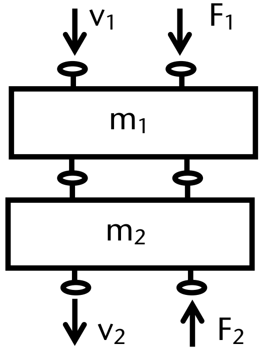
Numerische Modellierung der Schwingungen mit Hilfe der Vierpoltheorie



Kruk, R.

Hier werden Grundlagen zur Vierpoltheorie beschrieben und ein Vierpol-Modell eines Einmassenschwingers erläutert. Es werden hier Einsatzmöglichkeiten der Vierpole präsentiert, die man bei der Simulationen mechanischer Systeme einsetzen kann. Ein Beispiel aus den durchgeführten Arbeiten im Institut wird hier vorgestellt.

Basic principles as well as an example of quadripole modeling are described below. The quadripole plays a key role in simulation and can extend tools for this procedure. An experiment related to this area has been run at the IMW and will be present in this paper.

1 Einleitung

Der Entwurfsprozess der lärmarmen Maschinen wird von verschiedenen numerischen Simulationen unterstützt. Bei der Ermittlung von akustischen Eigenschaften wird sehr oft Finite Elementen Methode (FEM) benutzt. Mit ihr lassen sich z.B. Modalanalyse und Frequenzantwort einer Struktur ermitteln, die bei der Modellierung von Körperschall interessant sind. Für die Berechnung von auftretenden in den Konstruktionen dynamischen Kräften wird Mehrkörpersimulation (MKS) an-gewendet. In solchen Simulationen werden Konstruktionselemente durch unformbare, starre Massenpunkte abgebildet, die durch vordefinierte Verbindungselemente zu einem mechanischen System zusammengebaut werden. Als Verbindungselemente werden Feder oder Dämpfer genommen. Für möglichst Realitätsnahe Modellierung der Konstruktionen müssen diese Elemente definiert werden. Solche Definitionen können entweder aus nummerischer Lösung Gleichungssystemen oder aus Messergebnissen einer experimentellen Schwingungsanalyse aufgebaut werden. Hier wird eine Methode zur empirischen und theoretischen Ermittlung von solchen Parametern erläutert und ein Beispiel für ihre Anwendung präsentiert.

2 Mathematische Modellierung mit Hilfe von Vierpoltheorie

Zum Beschreibung eines mechanischen Systems wird das differenziale Gleichungssystem (1) angewendet.

$$[M] \cdot \left[\ddot{s}(t)\right] + [C] \cdot \left[\dot{s}(t)\right] + [K] \cdot \left[s(t)\right] = [F(t)] \quad (1)$$

Wobei M für die Massenmatrix, C für die Dämpfungsmatrix und K für die Steifigkeitsmatrix stehen. Der Vektor s(t) gilt für Verschiebungen in drei Achsrichtungen (x, y, z). Die Term F(t) beschreibt den Vektor mit Anregungskräften in drei Richtungen. Um ein System vollständig zu beschreiben, wird die Definition von den drei Matrizen (M, C, K) notwendig. Nach diesem Schritt ist es die Lösung des Gleichungssystems möglich und die Berechnung der Antwort des Systems s(t) auf der Anregungskraft F(t).

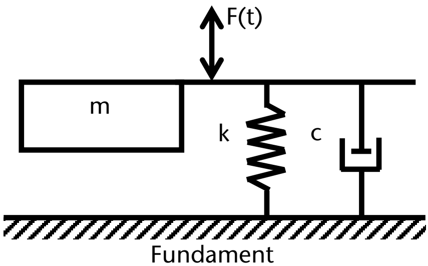


Bild 1: Einmassenschwinger nach /1/

Das **Bild 1** zeigt das Einmassenschwinger - Modell, das für das Veranschaulichen von vielen Maschinenelementen benutzt werden kann. Es lässt sich nach Gleichung (1) mit der Gleichung (2) mathematisch beschreiben.

$$m \cdot \ddot{s}(t) + c \cdot \dot{s}(t) + k \cdot s(t) = F(t) \quad (2)$$

In der Theorie findet man auch andere Formel wie Impedanz, die für Beschreibung der Schwingungen benutzt werden kann.

Die mechanische Impedanz Z kann als der Wiederstand einer elastischen Struktur gegen wirkende Kräfte bezeichnet werden. Wenn die Kraft F die Struktur erregt und die v die im Erregungspunkt gemessene Systemschnelle ist, bildet das Verhältnis von den beiden Größen die Eingangsimpedanz des betrachteten Systems (Gl. 3).

$$Z = \frac{F}{v} = \frac{F}{\dot{s}} \tag{3}$$

Die Gleichung (2) lässt sich in Impedanz umrechnen. Dies ist in den Gleichungen 4 bis 6 zu sehen.

$$F(t) = \widehat{F} \cdot e^{j\omega t} \tag{4}$$

$$s(t) = \widehat{s} \cdot e^{j\omega t} = \frac{\dot{s}}{j\omega} \tag{5}$$

$$Z = \frac{F}{\dot{s}} = jm\omega + c + \frac{k}{j\omega} \tag{6}$$

Wobei ω=2πfs Kreisfrequenz, $\widehat{F}$ = Kraftamplitude, $\hat{s}$ = Auslenkungsamplitude und j die Bezeichnung für imaginäre Zahl ist.

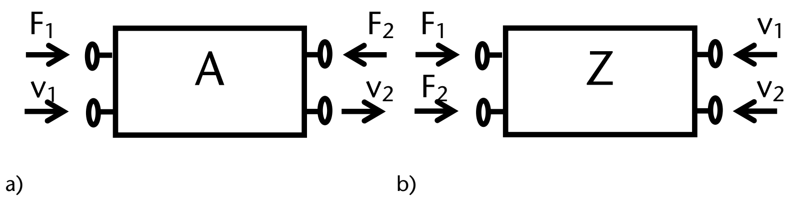


Bild 2: Kettenform (a) und Impedanzform (b) eines Vierpols

Wenn die Kraft und Schnelle am Fundament des Einmassenschwingers bekannt bzw. gemessen wird, kann das Übertragungsverhalten der modellierten Struktur ermittelt werden. In dem Fall gibt es zwei Größen am Eingang und am Ausgang. Die Übertragungsmatrix mit vier Elementen beschreibt das Verhalten sogenannte Vierpol-Darstellung und dieser Zusammenhang stellt die Gleichung 7 vor. Das ist so genannte Kettenform des Vierpols.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = [A] \cdot \begin{bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = [Z] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Neben Kettenform von Vierpolen wird die Impedanzform für die Modellierung angewendet (Gleichung 8). Die beiden Formen lassen sich umrechnen und ihre Unterschiede sind im **Bild 2** grafisch dargestellt. Das **Bild 2a)** stellt die Kettenform und das **Bild 2b)** die Impedanzformeines Vierpols dar. Eine Form kann in die andere Form umgerechnet werden.

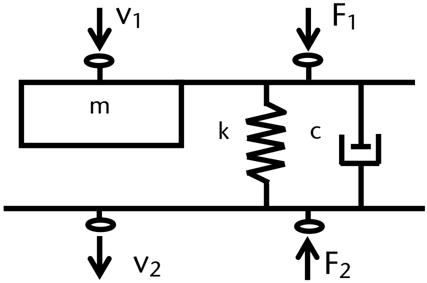


Bild 3: Vierpol-Darstellung des Einmassenschwingers in Kettenform

Bei der Modellierung von den mechanischen Systemen werden grundsätzlich Elemente wie: Punktmasse, massenlose Feder, viskoser Dämpfer benutzt. Sie werden für diese Art der Modellierung eingesetzt und genauere Definitionen bzw. Beschreibung von diesen Elementen finden Sie z.B. in /3,4/.

Das dargestellte im **Bild 3** Vierpol Modell des Einmassenschwingers kann mit der Gleichung 9 beschrieben werden.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j\omega m \\ 0 & \dfrac{j\omega c + k}{\omega^2 m + j\omega c + k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Ein Vierpol-Modell, das ein gesamtes mechanisches System nur mit zwei Ein- und Ausgängen (F_1, v_2; F_2, v_2) beschreibt, wird sehr komplex sein. Die Vierpoltheorie bietet eine Möglichkeit so einem komplexen Modell durch mehrere Teilsysteme mit mehreren Vierpolen nachzubilden. Diese Elemente können zwischen den Ein- und Ausgängen in Reihe bzw. parallel geschaltet werden. Für die Bestimmung von in Reihe geschalteten Vierpolen wird Kettenform benutzt. Hier werden die Matrizen A^i der Vierpolzwischenelemente miteinander multipliziert, so dass man eine Gesamt-Kettenmatrix A^{ges} bekommt. Die entsprechende Formel, finden Sie in der Gleichung 10. Bei mehreren starr miteinander verbundenen Eingangsgrößen der Teilsysteme tritt die Parallelschaltung von Vierpolen und in diesem Fall werden die Impedanzformen Z^i zusammenaddiert. Die bekommene Gesamt-Impedanzmatrix Z^{ges} stellt die Gleichung 11 vor.

$$A^{ges} = \prod_{i=1}^{n} A^i \tag{10}$$

$$Z^{ges} = \prod_{i=1}^{n} Z^i \tag{11}$$

Mit i=1, 2, ..., n und n gilt für Anzahl der zusammengeschalteten Vierpolzwischenelementen.

Mit der hier kurz beschriebenen Vierpoltheorie können mechanische Systeme modelliert werden und ihre Eigenschaften untersucht bzw. optimiert werden.

Als Beispiel für ein Vierpol-Modell wird hier ein mechanisches System mit Wälzlager kurz präsentiert. Das betrachtete Modell besteht aus drei Massen. Das **Bild 4a)** zeigt ein Modell nach /4/ und **Bild 4b)** ein Vierpol modelliertes Wälzlager im einen Gehäuse. Die Teilsysteme können hier getrennt betrachtet werden, was als Vorteil bei Optimierung gesehen werden kann. und Das dargestellte Modell wurde im Institut sowohl theoretisch als auch experimentell erfolgreich untersucht.

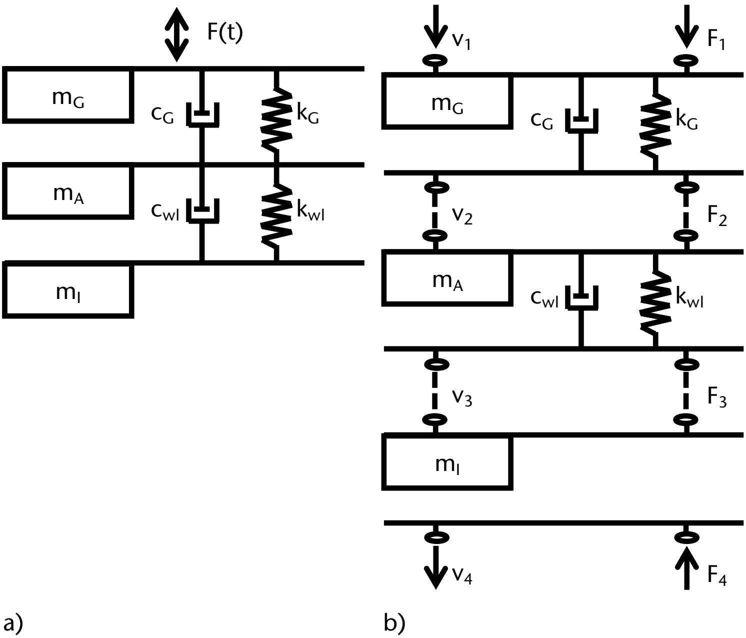


Bild 4: Wälzlagermodel nach /4/ (a) und Vierpol-Darstellung des Wälzlagers (b)

3 Zusammenfassung

Die Vierpoltheorie kann für die Simulation von mechanischen Systemen angewendet werden. Die durchgeführten numerischen und experimentellen Arbeiten hatten gezeigt, dass diese Methode für komplexe Systeme anwendbar ist. Die Parameter konnten sowohl für das Vierpol-Modell als auch für die Teilsysteme experimentell ermittelt werden und für die Modellierung eingesetzt werden.

Sie bietet Möglichkeit die Systemkomponenten einzeln zu betrachten. Dadurch können die Ergebnisse für andere Vierpol-Modelle mit den gleichen Systemkomponenten übertragen werden.

4 Literatur

/1/ Henn, H.; Sinambari R. Gh.; Fallen M.: Ingenieurakustik, Physikalische Grundlagen und Anwendungsbeispiele, 4. überarbeitete und erweiterte Auflage, Mit 319 Abbildungen und 36 Tabellen. Vieweg +Teubner, GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2008

/2/ Seidel, E, Wirksamkeit von Konstruktionen zur Schwingungs- und Körperschalldämmung in Maschinen und Geräten: Grundlagen, Messverfahren, Zusammenstellung typischer Bauelemente. Schriftenreihe der Bundesanstalt für Arbeitsschutz und Arbeitsmedizin Forschung; Fb. 852, Wirtschaftsverlag NW Verlag für neue Wissenschaft GmbH, Bremerhaven 1999

/3/ Sell, H.: Charakterisierung des dynamischen Verhaltens von elastischen Bauteilen im Einbauzustand. Vibracoustic GmbH&Co. KG, Weinheim 2005

/4/ Richter, H. P.: Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Körperschalleitung von Wälzlagern in Maschinen, Dissertation, Technsiche Hochschule Darmstadt, Fachgebiet Maschinenelemente und Maschinenakustik, Darmstadt 1989

/5/ Backhaus, S.-G., Eine Messstrategie zur Bestimmung des dynamischen Übertragungsverhaltens von Wälzlagern, in Institut für Maschinenwesen, 2007, TU Clausthal: Clausthal