

Kerbwirkung an Zahnwellenverbindung mit Evolventenzahnprofil

Hua, Q.; Schäfer, G.

Zahnwellen-Verbindungen sind typische Maschinenelemente für Übertragung von Drehmoment zwischen Welle und Nabe. Wegen der großen Anzahl von Formschlusselementen (Zähne) hat die Zahnwellen-Verbindung eine höhere Tragfähigkeit als andere Verbindungen mit gleichem Durchmesser. Andererseits verursachen die Zähne Kerbwirkungen im Zahnfuß sowohl im Kontaktbereich als auch im Bereich des Zahnlückenauslaufs. Die durch die Kerbwirkung verstärkte Materialermüdung ist maßgebend die Ursache von Dauerbrüchen an Zahnwellen. Zur theoretischen Abschätzung der Dauerfestigkeit von Zahnwellen müssen die Verzahnungsgeometrie, Oberfläche, Verzahnungsqualität, Materialpaarung, und andere Faktoren betrachtet werden.

Connections with involute splines are one of the most important machine elements for the transmission of torque. Such connections have a higher carrying capacity than other connections according to the number of load leading geometry elements (teeth). On the other side such a connection has a stress concentration in the tooth feet due to notch effect. For the theoretical estimation of fatigue resistance is necessary to regard the geometry, surface, quality, material matching and other factors.

1 Einleitung

Für die Übertragung höchster Drehmomente findet man im gesamten Maschinen- und Anlagenbau bevorzugt Zahnwellen-Verbindungen, welche sich durch die größere Anzahl von Kraftleitungselementen gegenüber den anderen formschlüssigen Verbindungen auszeichnen. Ihre herausragende Bedeutung erklärt sich daraus, dass sie formschlüssig, lösbar, verschieblich und mit modernen Verfahren der Massenfertigung (Spanen, Kaltumformen) herstellbar sind.

Dauer- oder Gewaltbrüche und Verschleiß sind die hauptsächlichsten Versagensarten dieser Welle-Nabe-Verbindungen. Mehrdimensionale Spannungskonzentrationen führen meist im Wellenzahnfuß zur Materialermüdung und als Folge davon zu Anrissen im Zahnfuß. Die axiale Lage des Anris-

sortes wird in der Praxis üblicherweise an der Lasteinleitungsseite der Welle dicht bei der Nabenkante oder am Verzahnungsauslauf beobachtet, **Bild 1**. Die Ursache dafür kann aus einer Kerbbetrachtung erklärt werden. Zahnwellen-Verbindung unter großen Querkräften oder anderweitig verursachten radialen Achsverlagerungen zwischen Welle und Nabe haben den Verschleiß als maßgebende Versagensarten. Im Rahmen dieses Aufsatzes werden Zahnwellen-Verbindungen mit Schiebeseit betrachtet, die im wesentlichen mit reinem Drehmoment belastet werden. Der Fall hoher Querkräfte und der damit verbundene Verschleißschaden soll hier nicht näher behandelt werden.

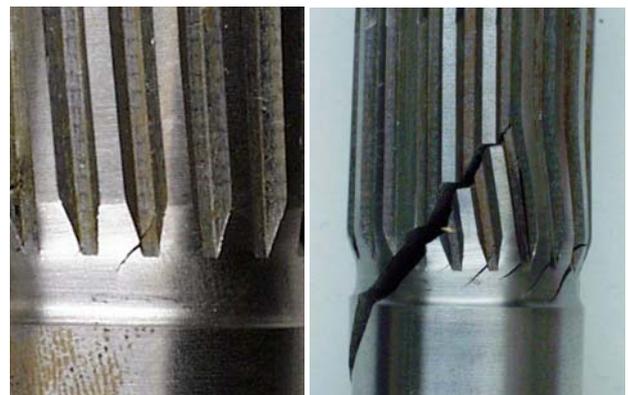


Bild 1: Typischer Anriß (links) und Bruch (rechts) im Auslauf an Zahnwellen

Die wichtigsten Maßnahmen zur Erhöhung der Lebensdauer von Zahnwellen-Verbindungen sind die geometrische Verbesserung der Verzahnung, z.B. Form der Nabe und Welle speziell in den angesprochenen Bereichen der Zahnfußausrundung und des Zahnlückenauslauf. Alle diese Maßnahmen zielen auf eine Kerbspannungsreduzierung.

2 Kerbspannung im Bereich des Verzahnungsauslaufs

2.1 Dreidimensionale Beanspruchung

Die Steifigkeiten von Welle und Nabe und insbesondere der Steifigkeitssprung am Verbindungsrand bewirken eine ungleichförmige Belastungs- und Beanspruchungsverteilung über der Verbindungsbreite mit einer scharfen Lastüberhöhung am

Verbindungsanfang. Bei kleinen Zähnezahlen tritt das Spannungsmaximum schon kurz vor der Nabenkante außerhalb der eigentlichen Verbindung auf. Mit Steigender Zähnezahl wird ein ausgeprägtes Spannungsmaximum am Verbindungsanfang innerhalb des Nabenbereiches erkennbar (**Bild 2**), wobei der Spannungsgradient auf der Zugseite deutlich größer ausfällt als auf der Druckseite. In diesen Bereichen hoher Spannungskonzentrationen kommt es unter dynamischen Lasten zur schadensrelevanten Werkstoffermüdung.

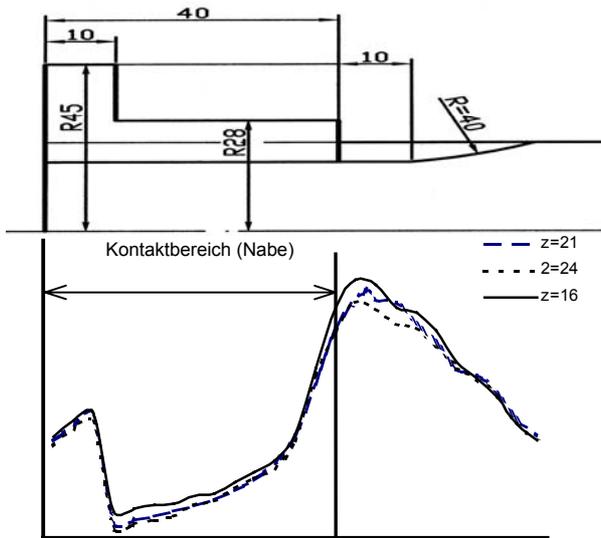


Bild 2: Verlauf der Vergleichsspannung im Zahnfuß der Zugseite, Verzahnung nach DIN 5480 , $T=560Nm$, $Q=0N$, Bezugsdurchmesser $d_B = 45mm$

Die Spannungsspitze bei den Verbindungen mit kleinen Zähnezahlen kurz vor dem Verbindungsanfang ist von der Geometrie des Verzahnungsauslaufs abhängig. Um das Spannungsmaximum im Zahnlückenauslauf zu bewerten, kann die Zahnwelle nicht mehr als tordiertes Prisma oder zylindrischer Körper angenommen werden. Es tritt eine Verwölbung der Querschnitte auf, wodurch die Symmetrieebene der Zähne nicht eben bleibt, **Bild 3**. Beim Zahnsektor ergibt sich daraus eine zusätzliche Verformung in der Tangentialrichtung.

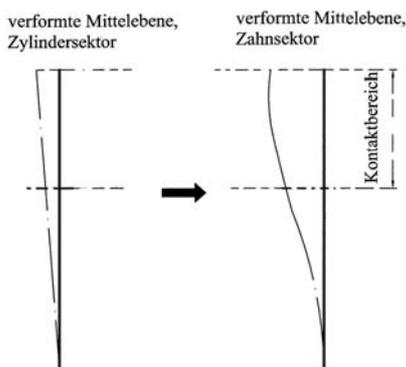


Bild 3: Unverformte und verformte Mittelachse des Zylinder- (links) und Zahnsektor (rechts)

Die Flankenpressung kann für diesen Fall über der Flankenhöhe zu einer resultierenden Kraft zusammengefasst werden. Durch die Anbindung des freien Wellenverzahnungsbereiches sind auch dort Beanspruchungen wirksam. Die Biege- und Druckanteile sind sogar größer als im Nabenbereich. Für das Berechnungsmodell werden daraus ein Ersatzmoment und eine Ersatzkraft abgeleitet, **Bild 4**.

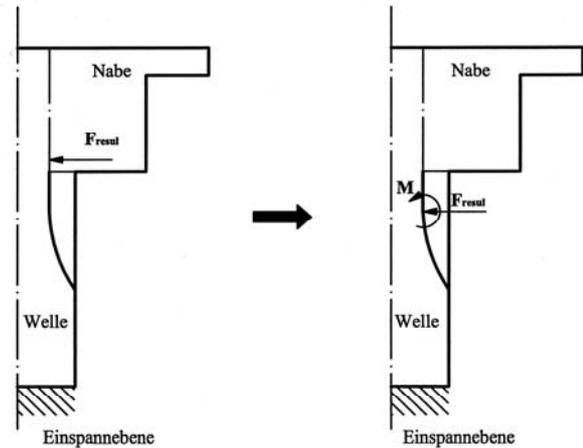


Bild 4: Mechanisches Ersatzmodell des Zylindersektors und des Zahnsektors

Die Spannung σ_{xy} im zylindrischen (unten links) und verzahnten (unten rechts) Wellenbereich ist im **Bild 5** dargestellt. Als Vergleich dazu sind die Beanspruchungen eines ungestörten Zylinderstabes mit reibschlüssiger Lastübertragung im Nabenbereich darüber dargestellt. Beim Zylinderstab liegt das Maximum der Spannungskomponente σ_{xy} nicht im Verbindungsbereich sondern nahe der Einspannebene (linker Bildrand), wo der Spannungszustand sehr kompliziert ist. In der Zahnwelle ist der Maximalwert von σ_{xy} kurz vor dem Verbindungsanfang. Der Unterschied der beiden Geometrien in gleicher axialer Position beträgt $\Delta\sigma_{xy} = 43 N/mm^2$. Dies bestätigt auch, dass die Zylinderbereiche als ein drehmomentbelastetes Prisma ohne Querschnittverwölbung angenommen werden können, wogegen der Zahnsektor diese Bedingung nicht erfüllt.

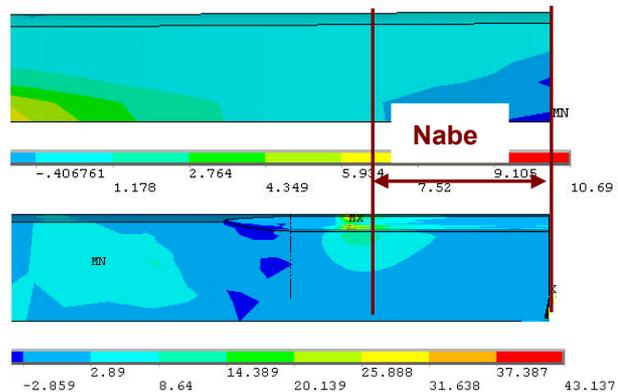


Bild 5: Verlauf der Spannungskomponente σ_{xy} am Zylinder und an der Zahnwelle, reine Torsion $T = 560 Nm$

2.2 Einfluß des Auslaufs auf die Beanspruchung

Der fertigungsbedingte Auslauf der Zahnücken in der Welle kann durch zwei grundsätzliche Modelle dargestellt werden: Zahnwelle mit gebundenem Auslauf und Zahnwelle mit freiem Auslauf, **Bild 6**.

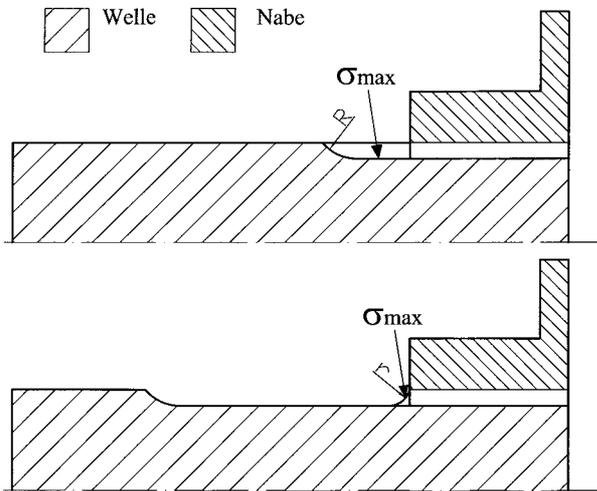


Bild 6: Forme der Zahnückenausläufe, gebunder Zahnückenauslauf (oben) und freier Zahnückenauslauf (unten)

Für die Zahnwelle mit gebundenem Verlauf ist die maximale Vergleichsspannung im Auslauf von dem Radius R abhängig. Erste entsprechende numerische Simulationen müssen noch weiter ausgewertet werden.

Die Verteilung der max. Vergleichsspannungen in Abhängigkeit von den Radien der freien Ausläufe wird im **Bild 7** dargestellt. Die maximale Vergleichsspannung $\sigma_{xy} = 384,62 \text{ N/mm}^2$ wieder vor dem Nabenbereich ergibt sich für die minimale Verundung mit einem Radius $r = 2 \text{ mm}$. Oberhalb von einem Radius $r = 5 \cdot m$ ist keine reduzierende Wirkung mehr zu erwarten.

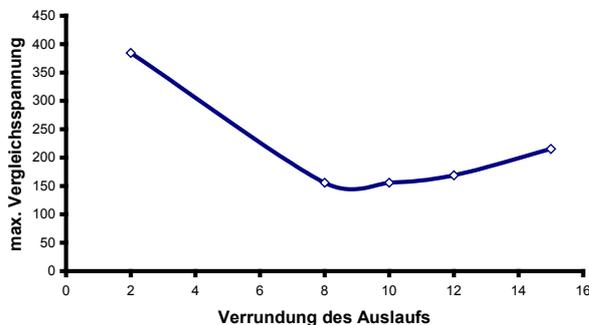


Bild 7: Maximale Vergleichsspannung im Auslauf in Abhängigkeit vom Radius r, freier Auslauf, $T=560 \text{ Nm}$, $d_B=45 \text{ mm}$, $m=2$, DIN 5480

2.3 Einfluss der Zahnabe

Außer dem Verzahnungsauslauf hat auch die Form der Nabe einen Einfluss auf die Beanspruchungsverteilung in der Wellenlängsrichtung. Naben mit kleinem Flansch am Verbindungsende erzeugen durch den kleineren Steifigkeitssprung erwartungsgemäß eine geringere Beanspruchungsüberhöhung. In diesem Fall ist der Spannungsgradient in der Längsrichtung nur etwas größer als der von der Verbindung mit einer Nabe ohne Flansch. **Bild 8** zeigt die Spannungsverläufe in Zahnfuß der Zugseite, die Neigung der Kurve entspricht dem Spannungsgradienten. Verbindungen mit ausgeprägtem Flansch (Flansch $\varnothing = 2 \cdot \text{Nabenaußen}\varnothing$) weisen eine starke Änderung der Spannung im Zahnfuß im Kontaktbereich am freien Wellenende auf.

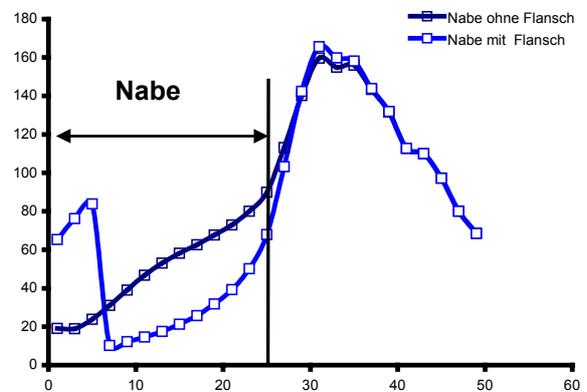


Bild 8: Verläufe der Vergleichsspannungen im Zahnfuß der Zugseite, Nabe mit/ohne Flansch, Verzahnungsgeometrie nach DIN 5480 45X2X21, $T=560 \text{ Nm}$

2.4 Lastaufteilung in der Umfangsrichtung

Um die maximale Zahnnormalkraft unter Drehmomentbelastung zu berechnen, muss das Lastaufteilungsverhalten in der Umfangs- und Axialrichtung bewertet werden. Die Lastverteilung über dem Verbindungsumfang wird beeinflusst durch Flankenspiel, Teilungs- und Zahndickenabweichungen, elastisches Nachgeben der Zähne unter Last sowie den Flankenverschleiß. Durch Vereinfachung des von Schäfer [4] entwickelten Ansatzes ergibt sich die Gleichung zur Berechnung des Umfangsfaktors k_φ für Zahnwellen-Verbindungen unter reinem Drehmoment zu:

$$k_\varphi = 1 + \left[\frac{2200 F_p}{p \cdot \left(1 + \frac{7500 \cdot T}{E \cdot z \cdot h_w \cdot b \cdot r_w} \right)} \right] \quad (1)$$

Mit den Größen:

F_p Teilungs-Gesamtabweichung

- p Teilung
- T Drehmoment
- E Elastizitätsmodul
- z Zähnezahl
- h_w Wirkhöhe
- b Verbindungsbreite
- r_w Wirkradius

Die Qualität der Verzahnung einer Welle oder einer Nabe wird nach der für Laufverzahnungen aufgestellten Norm DIN 3962 ermittelt, die eine tabellarische Beziehung zwischen Verzahnungsqualität und Teilungs-Gesamtabweichung F_p angibt. Für normale Verzahnung gilt $k_{\varphi, \max} \leq z/2$.

2.5 Einfluss der Verzahnungsgeometrie

Der Verlauf der von der Axialkoordinate abhängigen maximalen Vergleichsspannung im Zahnfuß der Welle einer drehmomentbelasteten Verbindung wird beeinflusst durch: Zahnform, Verbindungsbreite, Zahnüberstand, Nabenaußendurchmesser, Welleninnendurchmesser und andere geometrische Faktoren. Da die Spannungsspitze im Zahnfuß liegt, ist eine Möglichkeit zur Reduzierung der Kerbwirkung an dieser Stelle durch die Nutzung einer vollen Fußausrundung entsprechend der DIN/ISO 4156 gegeben. Die DIN/ISO 4156 kennt „flat“ und „fillet“ Zahnfußausbildungen, wogegen die Verzahnung nach DIN 5480 lediglich die Variante „flat“ vorsieht. Die Formzahl der beiden Verzahnungsgeometrien zeigt **Bild 9**. Die Zahnwelle mit Verzahnung „Flat-Zahnfuß“ hat speziell bei kleineren Zähnezahlen eine größere Formzahl als die Verzahnung mit „Fillet-Zahnfuß“.

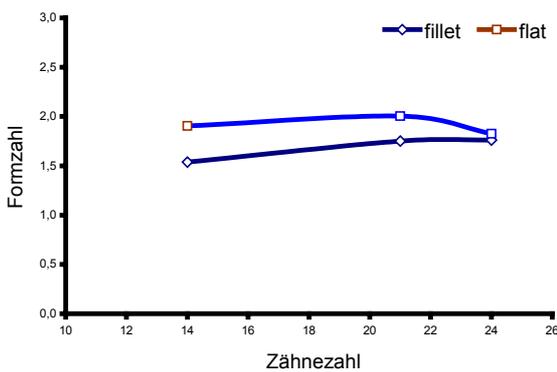


Bild 9: Formzahl der Zahnwelle nach ISO 4156. reine Torsion $T = 560 \text{ Nm}$, Teilkreisdurchmesser, $d = 42 \text{ mm}$, $m = 2 \text{ mm}$, Fillet- und Flatzahnfußausrundung

2.6 Ansatz zur Berechnung der maximalen Zahnfußspannung im Auslauf

In **Bild 10** ist der Zusammenhang zwischen angreifender Zahnkraft und der Position sowie dem Betrag der für die Zahnfußtragfähigkeit relevanten maximalen Zahnfußnennspannungen in der Zahnscheibe dargestellt (Bild links). Voraussetzung dafür ist, dass es in der Zahnwelle keine Verwölbung des Zahnquerschnitts gibt, bzw. keine Zug- und/oder Druckspannungsanteile in der Axialrichtung. Die Vergleichsspannung im Zahnfuß berechnet sich aus den auftretenden Biege-, Druck- und Schubspannungen. Die schadenskritische Beanspruchung tritt auf der Zugseite in der Randfaser auf. Andererseits wird der Zahnfuß im Querschnitt des Auslaufsbereichs durch eine resultierende Zahnnormalkraft F_{resul} und ein zusätzliches Biegemoment M_{zu} belastet, welches die Anteile der Biege- und Druckspannungsanteile im Zahnfuß an dieser Stelle verursacht (Bild rechts). Durch die beiden Erhöhungen der Spannungskomponenten wird die Vergleichsspannung im Zahnfuß des Verzahnungsauslaufs vergrößert.

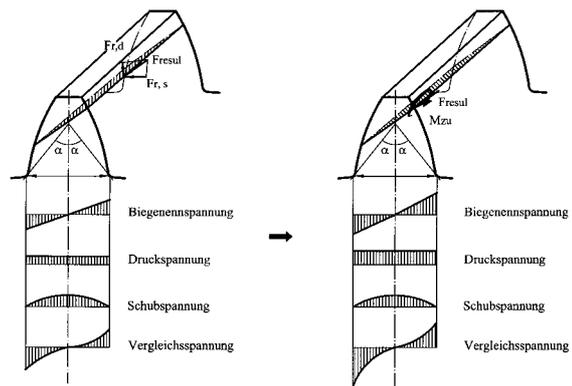


Bild 10: Zahnfußspannung durch eine angreifende Zahnnormalkraft

Die Zähne tragen die Zahnnormalkraft unter drei Formen: Kopf-, Fuß- und Normaltragverhalten, **Bild 11**. Das Tragverhalten wird hauptsächlich durch den Profilwinkel beeinflusst, daneben haben die äußeren Belastungen/elastischen Verformungen sowie Profilabweichungen einen Einfluss. Zähne mit Kopftragverhalten haben einen größeren Biegeanteil im Zahnfuß als solche mit Fußtragverhalten, weil hier die resultierende Flankennormalkraft einen kleineren Hebelarm hat.

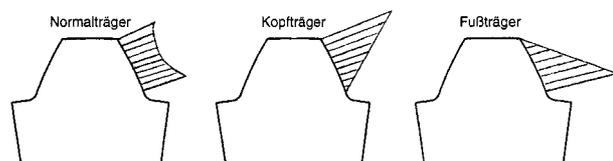


Bild 11: Tragverhalten eines einzelnen Zahnes

Die maximale Zahnkraft $F_{t,max}$ im Zahnquerschnitt in Tangentialrichtung berechnet sich aus

$$F_{t,max} = \frac{T \cdot K_\varphi}{d_B \cdot \zeta} \quad (2)$$

Mit	T	Drehmomentbelastung
	ζ	Faktor für das Tragverhalten
		=1,0 Normaltragverhalten
		=1,15 Kopftragverhalten
		=0,89 Fußtragverhalten

Die Lastverteilung in der Axialrichtung im Kontaktbereich ist wie beschrieben stark von der Form der Nabe (mit oder ohne Flansch) und vom Nabenaußendurchmesser abhängig, Bild 8. Ein Faktor für die Lastüberhöhung am Verbindungsanfang wurde von Wesolowski /2/ ermittelt. Dieser wurde mit Finite-Elemente-Berechnungen zu folgendem Lastverteilungsfaktor k_α wie folgt weiterentwickelt:

Für Verbindung mit Nabenaußendurchmesser d_2 oder Durchmesser der Nabenschulter $d_{2,s} \geq 2 \cdot d_B$ gilt, $k_\alpha = 1,8$

Für Verbindung mit $d_2, d_{2,s}$ kleiner als $2 \times d_B$, $k_\alpha = 1,15 - 1,5$

Die maximale Zahnkraft $F_{t,max,a}$ am Verbindungsanfang berechnet sich nach

$$F_{t,max,a} = \frac{T \cdot K_\varphi \cdot K_\alpha}{d_B \cdot \zeta} \quad (3)$$

Die maximale resultierte Zahnnormalkraft im Kontakt Bereich

$$F_{n,max,resul} = \frac{F_{t,max,a}}{\cos \alpha} \quad (4)$$

Ergebnisse von FE-Rechnungen zeigen, dass die obigen Spannungsanteile im Zug- und Druckbereich mit einem Faktor β etwa linear wachsen. Damit lassen sich die Zahnfußspannung im Verzahnungsauslauf mittels Ansätzen nach DIN 3990 neu entwickelt:

Biegespannung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \beta \cdot \frac{6 \cdot F_{n,max,a} \cdot h_F \cdot \cos \alpha_F}{b \cdot s_F} \quad (5)$$

Druckspannung

$$\sigma_d = \beta \cdot \frac{F_{n,max,a} \cdot \sin \alpha_F}{b \cdot s_F} \quad (6)$$

Schubspannung

$$\sigma_s = \frac{F_{n,max,a} \cdot \cos \alpha_F}{b \cdot s_F} \quad (7)$$

Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \sqrt{(\sigma_b - \sigma_d)^2 + (\alpha \cdot \tau_m)^2} \quad (8)$$

Mit $\alpha = 2,5$ nach Peeken.

Im Vergleich zu DIN 3990 haben die Zahnfußspannung im Auslauf von einer Zahnwelle einen erhöhten Zug- und Druckspannungsanteil, der wie folgt berechnet werden kann $(\sigma_b - \sigma_d) = \beta (\sigma_b^s - \sigma_d^s)$. „s“ bedeutet hierbei eine Berechnungsebene innerhalb der Nabe entsprechend den Ansätzen für Stirnräder.

3 Experimentelle Ergebnisse aus dem Schwings-Torsion-Prüfstand

Die von Garzke durchgeführten Torsionsschwingversuche an Zahnwellen-Verbindungen nach DIN 5480 32X1,5X30X21 (Wellenwerkstoff C24 mit $R_{eH}=400 \text{ N/mm}^2$) wurden mit einem Spannungsverhältnis $R=0,1$ gefahren. Zahnwellen-Verbindungen, bei denen nach 10^7 Lastwechseln kein Bruch eingetragen war, gelten dabei als dauerfest und werden als Durchläufer bezeichnet, Bild 12. Aufgrund der steifen Nabenausführung ($d_2 \geq 2,5 d_B$) ergaben sich an den Naben keine Schäden.

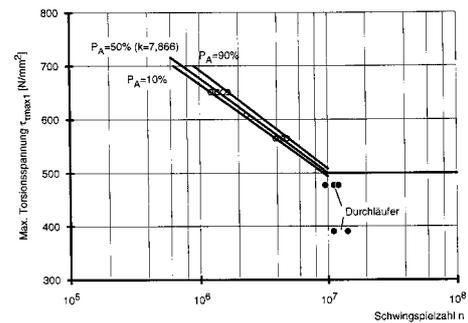


Bild 12: Wöhlerdiagramm der Zahnwelle DIN 5480 32X1,5X30X20 (beste Einbaustellung) /1/

4 Abschätzung der Dauerfestigkeit an Zahnwellen

Die theoretische Ermittlung der Dauerfestigkeit einer Zahnwelle erfordert neben der Berücksichtigung des Einflusses der Bauteilabsolutgröße und Bauteiloberfläche (Größenfaktor c_D und Oberflächenfaktor c_O) die Kenntnisse des bezogenen Spannungsgefälles als Maß für die Stützwirkung benachbarter Bauteilzonen auf die höchstbeanspruchte Stelle. Bei einer schnellen groben Abschätzung kann in der technischen Praxis die Stützwirkung vernachlässigt werden. Die Abschätzung liegt dann auf der sicheren Seite. Die Vorgehensweise bei der Bestimmung der Dauerfestigkeit ist im Bild 13 zu sehen.

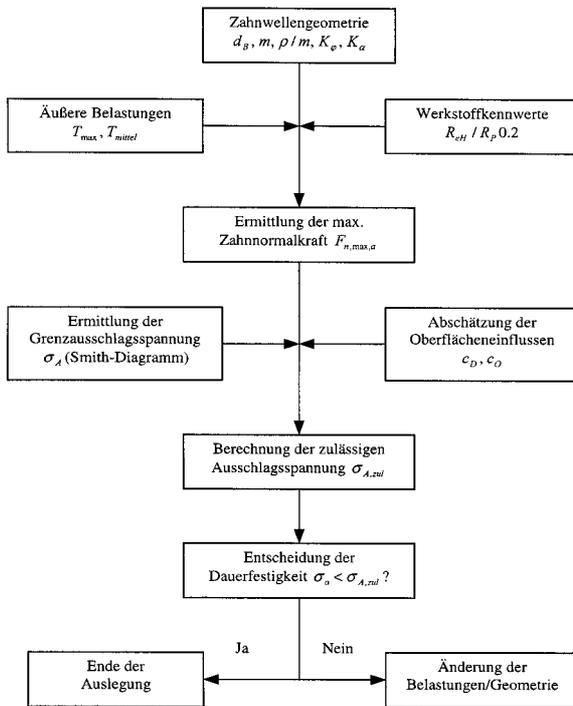


Bild 13: Vorgehensweise der theoretischen Abschätzung der Dauerfestigkeit an Zahnwellen, in Anlehnung an /1/

5 Zusammenfassung und Ausblick

Zahnwellen-Verbindung besitzt durch ihre mehrfachen Kerbwirkungen eine Spannungsspitze im Bereich des Verzahnungsauslaufs, welche durch die von den Flankenkontaktbelastungen herrührenden Beanspruchungen im Verzahnungsauslauf zusätzliche Biege- und Druckspannungsanteile erfahren. Die Geometrie des Verzahnungsauslaufs und die Form der Nabe sind zwei wesentliche Faktoren, die die maximale Vergleichsspannung im Zahnfuß beeinflussen.

Die Kerbwirkung im Zahnfuß außerhalb des Nabenkontaktbereichs ist mit den dort herrschenden hohen Belastungen für die Dauerbrüche an Zahnwellen verantwortlich. An dieser Stelle treten auch die max. dynamischen Spannung auf und verursachen zusammen mit dem Spannungsgradient die Materialermüdung, woraus dann die ersten Anrisse entstehen und zum Dauerbruch des Bauteils führen.

Das Beanspruchungsverhalten im Zahnauslauf ist kompliziert und eine Verbesserung der Ansätze zur Berechnung der maximalen Vergleichsspannung ist dringend angezeigt, wobei eine Adaption an die DIN 743 angestrebt wird. Der Schwerpunkt kann zunächst in der Abschätzung des Faktors β liegen. Möglichkeiten zur Erhöhung der Dauerfes-

tigkeit an Zahnwellen bieten u.a. die geometrische Variation der Verzahnungsgeometrie.

6 Literatur

- /1/ Garzke, M.: Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben Zahnwellenfestigkeit Di 289/9-2. Institut für Maschinenwesen, TU Clausthal 1998
- /2/ Wesolowski, K.: Dreidimensionale Beanspruchungszustände und Festigkeitsnachweis drehmomentbelasteter Zahnwellen-Verbindungen unter elastischer und teilplastischer Verformung. Dissertation. TU Clausthal 1996
- /3/ Straßer, H.: Einflüsse von Verzahnungsgeometrie, Werkstoff und Wärmebehandlung auf die Zahnfußtragfähigkeit. Dissertation. TU München 1984
- /4/ Schäfer, G.: Der Einfluß von Oberflächenbehandlungen auf das Verschleißverhalten flankenzentrierter Zahnwellen-Verbindungen mit Schiebeseit. Dissertation. TU Clausthal 1995