

## Berechnung von Zahnwellen-Verbindungen mit Preßsitz unter Verwendung des Finite-Elemente-Programmsystems MARC/MENTAT

Burgtorf, U.

Das Beanspruchungsverhalten von Zahnwellenverbindungen mit Preßsitz wird am IMW mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente mit dem Programmsystem MARC/MENTAT untersucht. Dieses FE-Programm bietet eine spezielle Kontakt-Option, mit der die Kontaktvorgänge zwischen den Zahnpaaren ohne GAP-Elemente nachgebildet werden können. Um die Simulation von Zahnwellenverbindungen mit Preßsitz zu ermöglichen, sind sowohl zwei- als auch dreidimensionale FE-Modelle und Berechnungsmethoden entwickelt worden, mit denen sich die Beanspruchungsverläufe über der Flanke und der Verbindungslänge sowie auch der Einfluß von Teilungsabweichungen auf die Lastverteilung über den Verbindungsumfang untersuchen lassen. Die entwickelten Berechnungsmethoden und Modelle werden hier vorgestellt.

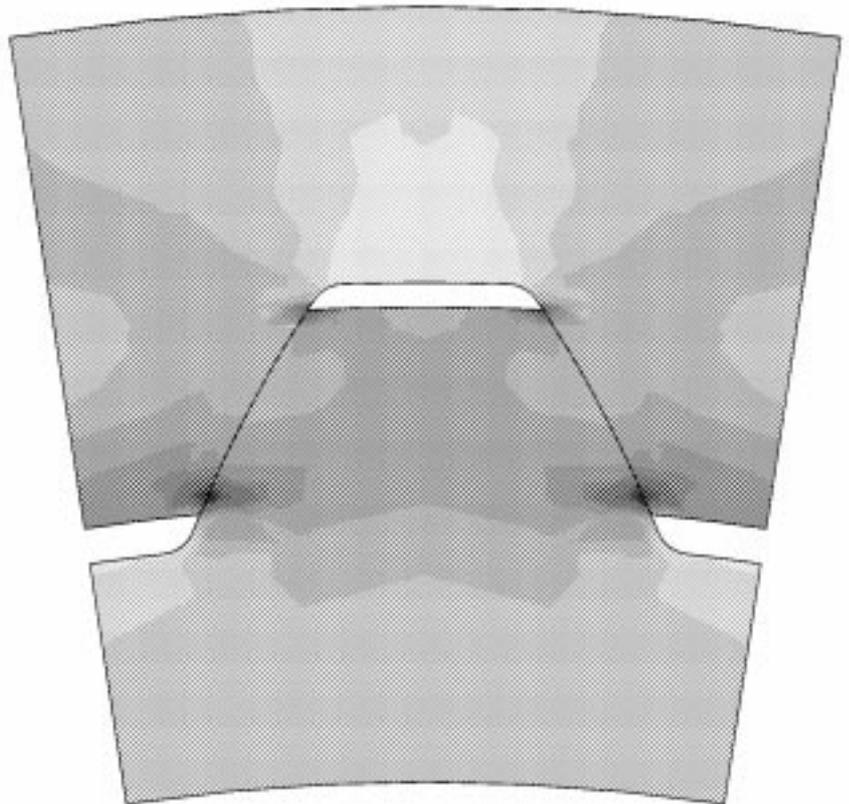


Bild 1.1 Beanspruchungsverläufe in einer Zahnwellenverbindung mit Preßsitz (FEM-Darstellung)

*The strain behaviour of involute splines with press fit is investigated at the IMW by using the finite element method and the program system MARC/MENTAT. This program offers a special contact option to simulate the contact between the teeth of hub and shaft without using gap elements. For the simulation of involute splines with press fit two- and three-dimensional finite element models and computation methods are developed. With these methods and models it is possible to investigate the contact stresses on the toothflanks and in axial direction as well as the influence of pitch error on the load distribution along the circumference. The developed finite element methods and computation models are shown in this article.*

### 1 Einleitung

Neben der ursprünglich als formschlüssige Welle-

Nabe-Verbindung entworfenen Zahnwellenverbindung mit Schiebesitz ist als zweite Entwicklung die Zahnwellenverbindung mit Preßsitz entstanden. Durch den Preßsitz werden axiale Relativbewegungen, die als Hauptursache für Verschleißerscheinungen anzusehen sind, verringert und der Verschleiß minimiert. Über die Beanspruchungen in derartigen Zahnwellenverbindung liegen keine Erkenntnisse vor, mit Hilfe von FE-Rechnungen wird der Einfluß verschiedener Geometriefaktoren auf das Beanspruchungsverhalten ermittelt (**Bild 1.1**).

Dazu sind für das Programmsystem MARC/MENTAT Berechnungsmethoden entwickelt worden, die es ermöglichen, an einem ebenen, keilförmigen Modell den Übermaßeinfluß auf die Flankenpressung, an dreidimensionalen Keilmodellen den Übermaßeinfluß auf die Flankenpressung über der Verbindungslänge und an ebenen Nachbildungen einer vollständigen Zahnwellenverbindungen den Einfluß der

Teilungsabweichungen auf die Lastverteilung zu bestimmen.

## 2 FE-Modelle

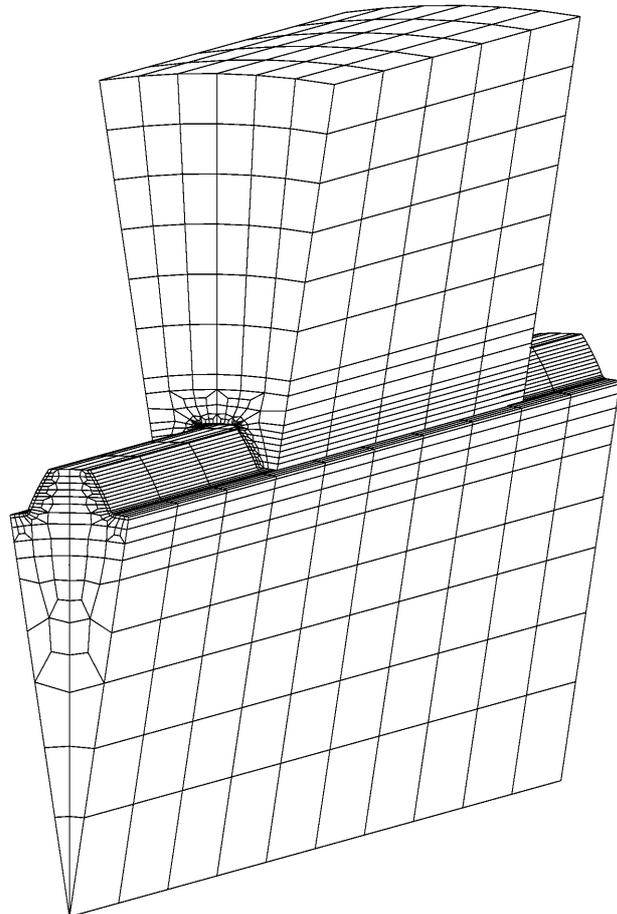
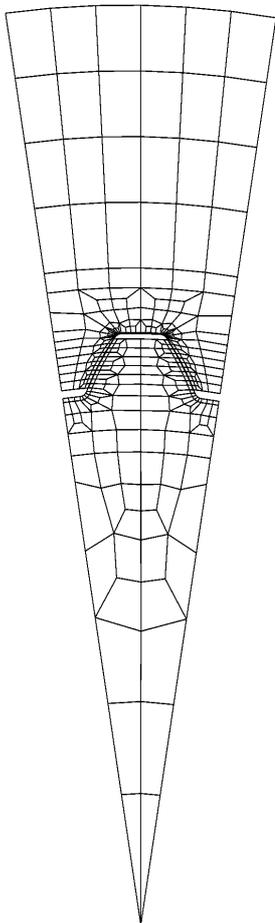
Der Anforderung an die zu untersuchenden Beeinflussungsparameter entsprechend, sind verschiedene FE-Modelle entstanden. Die Nachbildungen beschränken sich auf die Wiedergabe eines Ausschnitts (keilförmige Modelle eines Zahnpaars; eben **Bild 2.1** oder räumlich **Bild 2.2**) oder eines ebenen Abschnitts (vollständige Modelle; eben **Bild 2.3**).

Die Beschränkungen auf Modellausschnitte ist notwendig, da brauchbare Ergebnisse ein möglichst fein strukturiertes Modellnetz notwendig machen. Der Modellumfang bei dreidimensionalen vollständigen Zahnwellenverbindungen erfordert jedoch selbst bei grober Elementierung extrem große Rechnerleistungen und führt zu langen Rechenzeiten. Daher wird nur ein Teil einer Zahnwellenverbindung unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften abgebildet. Bei der Auswahl der Symmetrieebenen muß darauf geachtet werden, daß nicht nur die geometrischen Eigenschaften, sondern auch das Beanspruchungs-

und Verformungsverhalten des vollständigen Bauteiles wiedergegeben werden. Eine Untersuchung von Zahnwellenverbindungen mit Teilungsabweichungen ist zum Beispiel nur mit einem Vollmodell möglich, da die Teilungsabweichungen zu unsymmetrischen Belastungen führen, die mit einem Keilmodell nicht wiedergegeben werden können.

### 2.1 Ebenes Keilmodell

Mit dem Modell in Bild 2.1 läßt sich unter Annahme eines ebenen Spannungszustands eine ideale fehlerfreie Zahnwellenverbindung mit Preßsitz nachbilden. Der Einfluß von Übermaß, Verzahnungsgeometrie und Nabenwandstärke auf den Flankenpressungsverlauf läßt sich untersuchen. Die Simulation von Drehmomentbelastungen ist mit entsprechenden Randbedingungen ebenfalls möglich. Hier muß allerdings berücksichtigt werden, daß Drehmomentbeanspruchungen zu keinem ebenen Spannungszustand führen und sich daraus ein Fehler bei der Ermittlung der Flankenpressung ergibt. Dieser ist aber im Vergleich mit den Werten des Berechnungsansatzes nach DIN 5466 E /1/ vernachlässigbar klein.



**Bild 2.1** Ebenes Keilmodell einer Zahnwellenverbindung

**Bild 2.2** Räumliches Vollmodell einer Zahnwellenverbindung

Die Möglichkeit der Drehmomentaufbringung wird hier nicht weiter beschrieben, es sei an dieser Stelle auf den Artikel von K. Wesolowski in dieser Institutsmitteilung verwiesen.

## 2.2 Räumliches Keilmodell

Das zweite Modell in Bild 2.2 ist wiederum nur für abweichungsfreie (nach DIN) Verzahnungen verwendbar. Außer zu den in Kapitel 2.1 genannten Untersuchungen läßt sich das Modell für Untersuchungen mit zusätzlicher Drehmomentbeanspruchung und zur Ermittlung der Flankenpressungsverteilung über der Verbindungslänge verwenden. Wegen der längeren Rechenzeiten aufgrund eines größeren Modellumfangs wird dieses Modell aber nicht für die mit dem Keilmodell durchführbaren Rechnungen verwendet.

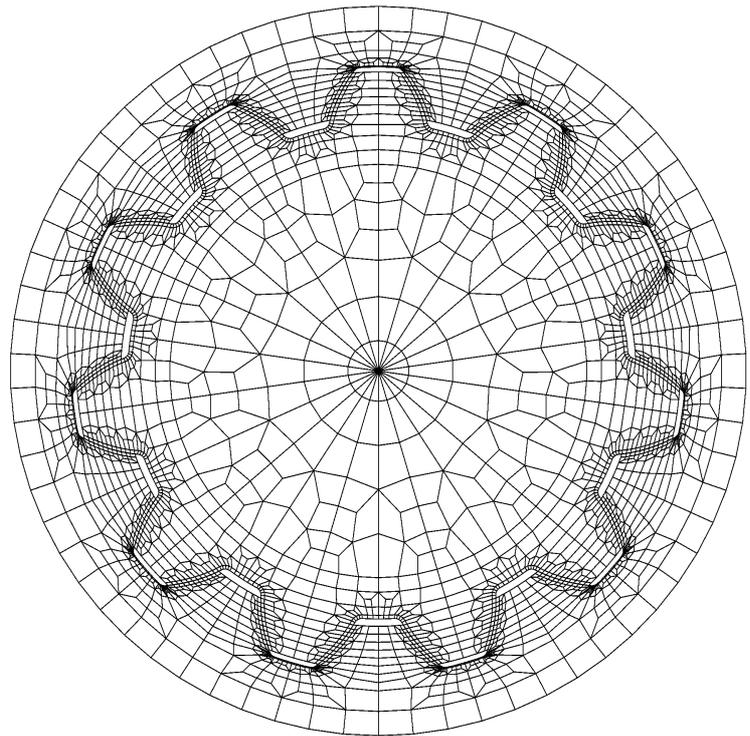


Bild 2.3 Ebenes Vollmodell einer Zahnwellenverbindung  
Zahnwellenverbindung 10x0,8x30x11 DIN 5480

## 2.3 Ebenes Vollmodell

Für die Untersuchung des Einflusses der Teilungsabweichungen auf die Lastverteilung entlang des Verbindungsumfanges sind die Modelle, die nur ein Zahnpaar der Verbindung darstellen, nicht einsetzbar. Zur Bestimmung des Einflusses der Teilungsabweichungen auf benachbarte Zähne muß ein ebenes Vollmodell verwendet werden (Bild 2.3). Durch Verdrehung der Zähne lassen sich beliebige Teilungsfehlergrößen und -verteilungen nachbilden. Dazu werden die Knoten beider Zahnflanken um den Ursprung (Verbindungsachse) gedreht.

## 3 Modellrandbedingungen

Um mit den beschriebenen Modellen ein Verformungs- und Beanspruchungsverhalten einer vollständigen Zahnwellenverbindung wiedergeben zu können, ist es erforderlich, das Verhalten einer vollständigen Zahnwellenverbindung mit entsprechenden Randbedingungen nachzubilden. Die Verformungen des Teilmodells, bei den in den Berechnungsmethoden verwendeten Schrumpfvorgängen (siehe Kapitel 5) müssen den Verformungen

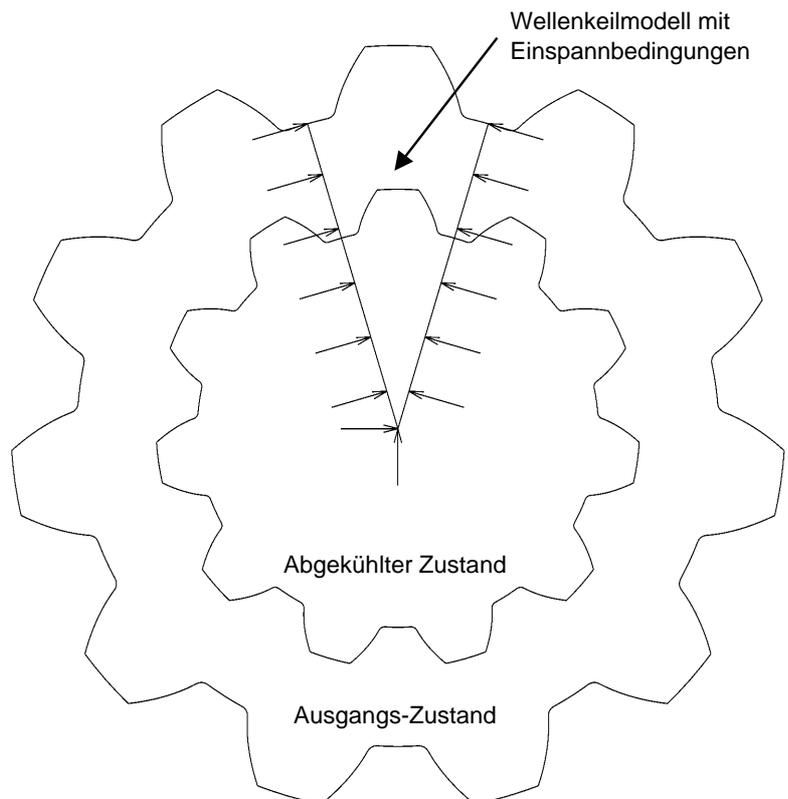


Bild 3.1 Einspannbedingungen der Keilmodelle beim Schrumpfvorgang  
(Vergleich Keilmodell - Vollmodell am Beispiel der Welle)

eines Vollmodells entsprechen. Die Modellkanten (Symmetrieebenen der vollständigen Zahnwellenverbindung) verschieben sich bei einem Schrumpfvorgang nur in radialer Richtung; tangential dürfen keine

Verschiebungen auftreten. Dies gilt sowohl für das Wellen- als auch das Nabenmodell (**Bild 3.1**). Zur Festlegung der Knotenfreiheitsgrade in tangentialer Richtung ist eine Transformation der Randknoten in ein lokales zylindrisches Koordinatensystem erforderlich. Die Achsen des lokalen Koordinatensystems befinden sich in diesem Fall auf der Modellkante bzw. senkrecht dazu. Der Wellenmittelpunkt bleibt von dieser Transformation jedoch ausgenommen.

Damit die drei verschiedenen Teilmodelle das Verhalten einer kompletten Zahnwellenverbindung bei Übermaß (kein Drehmoment) wiedergeben, sind die nachfolgend aufgeführten Einspannbedingungen erforderlich:

#### Randbedingungen für das ebene Keilmodell

- Die Knoten auf den Symmetrieebenen müssen in tangentialer Richtung fixiert werden.
- Der Wellenmittelpunktsknoten wird in allen Koordinatenrichtungen festgelegt, da sich die Lage der Mittelachse nicht verschieben darf.

#### Randbedingungen für das räumliche Keilmodell

- Die Knoten auf den Symmetrieebenen müssen in tangentialer Richtung fixiert werden.
- Die Knoten auf der Wellenachse werden außer in axialer Richtung in allen anderen Koordinatenrichtungen gefesselt, da sich die Lage der Mittelachse nicht verschieben darf.
- Die Knoten einer beliebigen axialen Modellschicht (des erwärmten oder abgekühlten Modellteils) müssen zusätzlich axial festgelegt werden, die im Kontaktbereich befindlichen Knoten bleiben allerdings davon ausgenommen. Um diese Knotenschicht herum erfolgt die Ausdehnung bzw. Schrumpfung des Modells in axialer Richtung. Die Auswahl der mittleren Modellschicht für die Fesselung führt zu einem vollkommen symmetrischen Schrumpfvorgang.

#### Randbedingungen für das ebene Vollmodell

- Die Knotenpunkte am Nabenrand werden tangential gegen Verdrehung gefesselt.
- Der Wellenmittelpunktsknoten wird in allen Koordinatenrichtungen festgelegt

- Die erste Knotenschicht um den Wellenmittelpunkt wird zur Verhinderung einer Verdrehung durch die aus den Teilungsabweichungen resultierenden Kräfte tangential gefesselt. Der Radius, auf dem sich die zu fesselnden Knoten befinden, darf jedoch nicht zu klein sein.

#### **4 Die MARC/MENTAT Kontakt-Option**

MARC/MENTAT besitzt eine spezielle Kontakt-Option, die eine Kontakt-Simulation zwischen verschiedenen Körpern zulässt. Diese Körper werden aus einer Gruppe von Elementen gebildet, deren Oberflächenkontur zur Überprüfung eines möglichen Kontakts verwendet wird. Dazu wird der Abstand der Oberflächenknoten jedes Körpers gegenüber der Oberflächenstruktur der übrigen Körper überprüft. Sobald der Abstand geringer als die Kontakttoleranz ist, die von MARC aus der Netzgeometrie bestimmt wird oder auch vorgegeben werden kann, liegt ein Kontakt zwischen den Körpern vor. Der Kontakt wird wieder aufgelöst, sobald an den in Kontakt befindlichen Knoten eine Zugkraft festgestellt wird. Weiterhin lässt sich zwischen den Körpern auch Reibung mit verschiedenen Reibungskomponenten simulieren.

#### **5 Simulation eines Übermaßes**

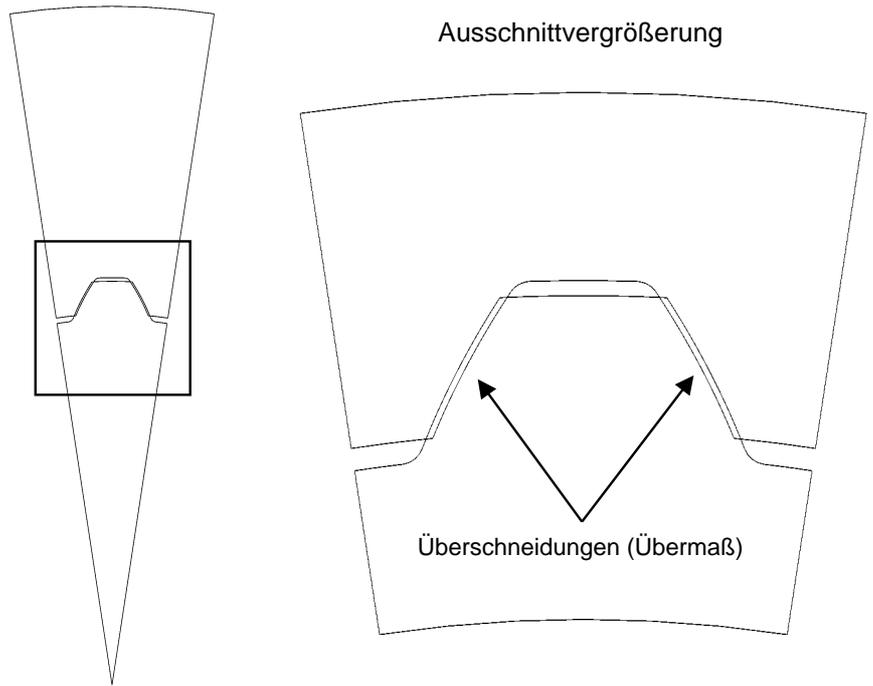
Die Simulation eines Preßsitzes erfordert zunächst die Aufbringung eines Übermaßes auf die Zahnflanken der Zahnwellenverbindungen. Diese erfolgt bei der Modellerstellung mit MENTAT durch Verdrehung der Knoten auf den Zahnflanken um einen Winkel bezüglich des Ursprungs; die linken Zahnflanken werden in positiver und die rechten Zahnflanken in negativer Richtung verdreht. Das aufgebrachte Übermaß wird dabei als die Länge des Bogenabschnitts im Teilkreis definiert.

Zu Beginn der Berechnung überschneiden sich zunächst die Modellgeometrien von Welle und Nabe im Zahnflankenbereich (**Bild 5.1**). Die Umwandlung der Überschneidung durch das aufgebrachte Übermaß in eine Pressung lässt sich bei Einhaltung der bereits vorgestellten Einspannbedingungen nur durch die Simulation eines Schrumpfvorgangs realisieren. Für das ebene Modell einer vollständigen Zahnwellenverbindung ist dies aufgrund der Geometriegegebenheiten die einzige Möglichkeit. Es sei hier darauf hingewiesen, daß mit dieser Methode nur Querpreßverbände nachgebildet werden können. An einer Methode zur Simulation von Längspreßverbin-

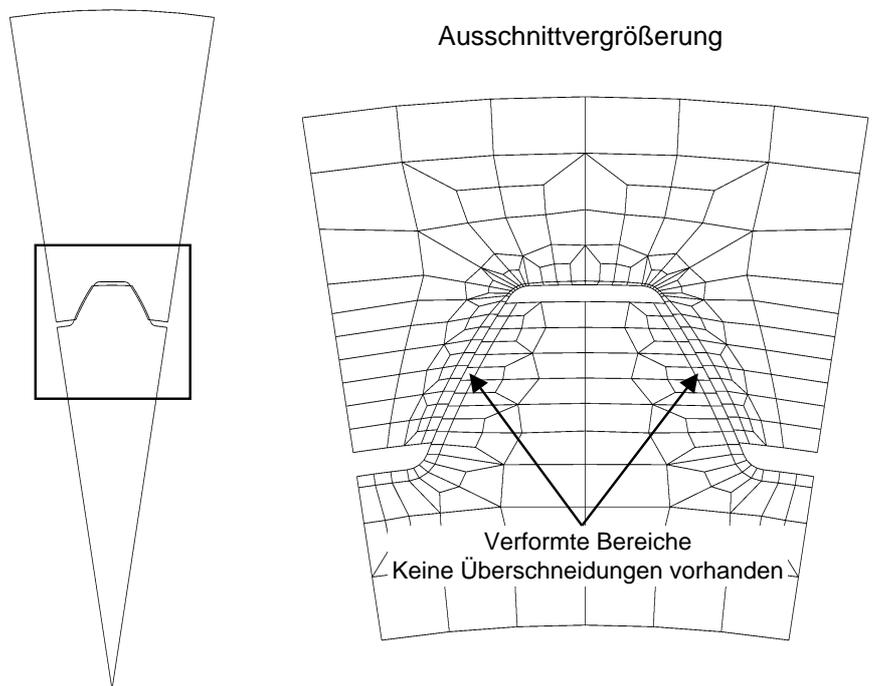
dung wird im IMW zur Zeit noch gearbeitet.

Entscheidend für die Berechnungsmethodik des Schrumpfvorgangs ist die Kontakt-Option von MARC/MENTAT. Zunächst wird die Kontakttoleranz auf einen so geringen Wert (zum Beispiel  $1 \cdot 10^{-7} \text{ mm}$ ) eingestellt, daß aufgrund der vorhandenen Genauigkeit der Knotenkoordinaten kein Kontakt zwischen den Körpern Welle und Nabe festgestellt werden kann. Anschließend kann die Abkühlung der Welle oder Erwärmung der Nabe in einem einzigen Berechnungsschritt erfolgen, da im Prinzip nur eine Abkühlungsrechnung ohne Kontaktermittlung durchgeführt wird. Es handelt sich hier um keine reale Wärmerechnung, sondern nur um eine Vergrößerung bzw. Verringerung der Körperausmaße durch eine gleichmäßige Temperaturerhöhung bzw. -absenkung.

Nach diesem Abschnitt, die Körperkonturen überschneiden sich jetzt nicht mehr, wird die Kontakttoleranz auf einen für die Durchführung der Kontaktermittlung notwendigen Wert eingestellt. Es kann die Wiedererwärmung der Welle bzw. Wiederabkühlung der Nabe in kleinen Temperaturschritten erfolgen. Damit bewegt sich der abgekühlte bzw. erwärmte Körper wieder in Richtung seiner Ausgangsform zurück, mit dem Unterschied, daß jetzt eine Kontaktberechnung erfolgt und der Rückverformungsbereich durch den zweiten vorhanden Körper eingeschränkt wird. Während sich ein Körper zurückverformt tritt er langsam mit dem Zweiten in Kontakt, beide Körper verformen sich im Kontaktbereich auf der Zahnflanke bis schließlich bei der Aus-



**Bild 5.1** Modellüberschneidung im Bereich der Zahnflanken an einem Modell vor der FE-Rechnung (Keilmodell mit Ausschnittsvergrößerung)



**Bild 5.2** Verformtes Modellnetz nach der FE-Rechnung; Übermaß in Verformung umgewandelt (Keilmodell mit Ausschnittsvergrößerung)

gangstemperatur das vorhandene Übermaß in eine Pressung umgewandelt wurde (**Bild 5.2**).

## 6 Einfluß von Berechnungsparametern

Mit Auswahl der Kontakttoleranz, der Temperaturschrittweite pro Berechnungsschritt (Inkrement) und des Wärmeausdehnungskoeffizienten erfolgt auch eine Beeinflussung der Vorgänge bei der Kontakt-ermittlung. Eine ungeeignete Kombination dieser Parameter kann zu zahlreichen Iterationsvorgängen bei der Kontaktüberprüfung und damit zu langen Rechenzeiten bis hin zu unbrauchbaren Ergebnissen führen. Es ist daher bei der Auswahl der Parameter auf eine geeignete Abstimmung zu achten.

Prinzipiell ist der Wert für den Wärmeausdehnungskoeffizienten frei wählbar, es sollte dennoch der Wert für den zu untersuchenden Werkstoff gewählt werden, da somit auch die erforderliche Temperaturdifferenz beim Fügevorgang ermittelt werden kann. Die Wahl der Temperaturschrittweite erfolgt anhand des Ausdehnungskoeffizienten und der Modellabmaße, so daß die bei der Berechnung im Bereich des Zahnflankenkontakts auftretenden Längenänderungen die zu wählende Kontakttoleranz nicht überschreiten. Sehr kleine Temperaturänderungen, die kleine Längenänderungen bewirken, führen zu langen Rechenzeiten aufgrund zahlreicher Rechenschritte bis zum Erreichen der Endtemperatur. Eine sehr große Temperaturdifferenz mit Längenänderungen, die größer als die Kontakttoleranz sind, führt ebenfalls zu langen Rechenzeiten, da sich die exakte Kontaktermittlung mit einer im Verhältnis zur Ausdehnungsänderung kleinen Kontakttoleranz wegen alternierender Iteration als sehr schwierig erweist. Die Kontakttoleranz sollte im Verhältnis zu den Modellausmaßen, der verwendeten Elementgröße (auf diese Art berechnet MARC die Kontakttoleranz) und der zu erwartenden Ergebnisgröße gewählt werden. Zu große wie auch zu kleine Werte führen zu ungenauen Kontaktbestimmungen. Eine Untersuchung von Übermaßen von einigen  $\mu\text{m}$ , mit resultierenden Verformungen im  $\mu\text{m}$ -Bereich, erfordert eine Kontakttoleranz, die ebenfalls in dieser Größenordnung liegt. Für bereits untersuchten Übermaßbereiche von ca. 5 - 100  $\mu\text{m}$  hat sich eine Kontakttoleranz von 1  $\mu\text{m}$  bewährt.

## 7 Zusammenfassung

Zur Untersuchungen von Zahnwellenverbindungen mit Preßsitz sind für das FE-Programmsystem MARC/MENTAT mehrere Zahnwellenmodelle mit entsprechender Berechnungsmethodik entwickelt

worden. Diese Modelle sind auf die zu untersuchenden Parameter zugeschnitten und hinsichtlich der erforderlicher Rechenzeit optimiert worden. Weiterhin wurden Richtlinien für eine optimale Auswahl der Berechnungsparameter vorgestellt. Die Berechnungsmethodik läßt sich auch auf Preßsitzverbindung mit anderen Formelementen wie zum Beispiel Keilwellenverbindungen übertragen. Die Untersuchung von rotationssymmetrischen Schrumpfverbindungen ist mit MARC/MENTAT ebenfalls möglich, allerdings nicht mit der hier beschriebenen Methode.

## Literatur

- /1/ DIN 5466E: Tragfähigkeitsberechnung von Zahn- und Keilwellen-Verbindungen; Berlin, Beuth-Verlag 1994
- /2/ DIN 5480: Zahnwellenverbindungen mit Evolventenflanken; Berlin, Beuth-Verlag 1986
- /3/ Burgtorf, U.: Theoretische Untersuchungen zur Ermittlung der Bauteilbeanspruchungen in Zahnwellenverbindungen unter Preßsitz; Studienarbeit TU Clausthal 1992
- /4/ Burgtorf, U.: Ermittlung der Umfangs-Lastverteilung an Zahnwellenverbindungen mit der FE-Methode unter Berücksichtigung fertigungstechnischer Einflüsse; Diplomarbeit TU Clausthal 1993
- /5/ Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau, 15. Auflage; Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1983
- /6/ MARC K5.2, MARC Analysis Research Corporation; Palo Alto, USA 1993
- /7/ MENTAT II, MARC Analysis Research Corporation; Palo Alto, USA 1993