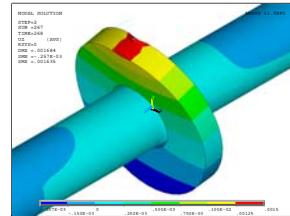


# Über die Verformung von dicken Kreisringplatten unter exzentrischer Axiallast



Thoden, D.

*Die Verformung von zylindrischen Pressverbänden kann für dünne Naben mit großem Durchmesser mit der Kirchhoff'schen Plattentheorie beschrieben werden. Wird die Dicke gegenüber dem Durchmesser allerdings zu groß, so werden die Randbedingungen für diese Theorie nicht mehr eingehalten. Die in diesem Beitrag beschriebene Untersuchung zeigt jedoch, dass auch für diesen Fall eine analytische Lösung angegeben werden kann.*

*The deformation of cylindrical interference fits can be described for thin hubs with large diameter by the Kirchhoff's plate theory. If the thickness becomes too large in relation to the diameter the boundary conditions for this theory are no longer met. The investigation described in this contribution shows that even in this case an analytic solution can be found.*

## 1 Motivation

Zylindrische Pressverbände stellen eine einfache Möglichkeit dar, ungekerbte Welle-Nabe-Verbindungen herzustellen. Für die Berechnung stehen eine ganze Reihe von analytischen Formeln zur Verfügung, mit denen eine zuverlässige Auslegung möglich ist. Die Verformungsrechnungen stützen sich dabei auf die Kirchhoff'sche Plattentheorie.

Es kann aber nicht immer davon ausgegangen werden, dass ein Pressverband in axialer Richtung symmetrisch belastet wird, so kommt es z. B. bei schrägverzahnten Zahnrädern zu einer Axialkraftkomponente, die nur im Zahneingriff entsteht und so die Radscheibe exzentrisch belastet.

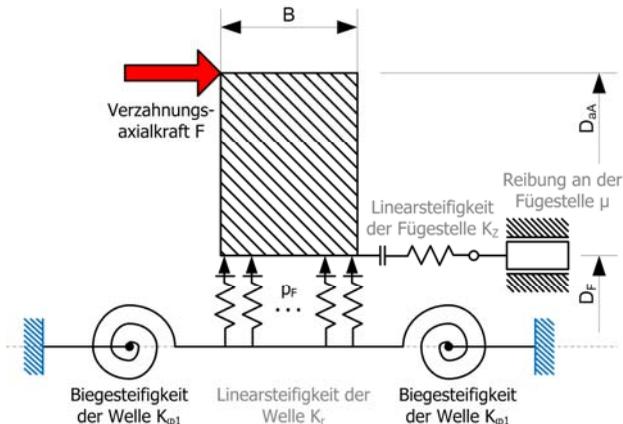
Bei Zahnrädern kann allerdings nicht immer davon ausgegangen werden, dass das Verhältnis von Durchmesser zu Breite so groß ist, dass die Randbedingungen der Plattentheorie getroffen werden. Um auch für diese Fälle analytische Auslegungskriterien zu finden, wurde die im Folgenden beschriebene Untersuchung durchgeführt.

## 2 Untersuchungsumfang

Ein weiteres Beispiel für dicke Kreisringplatten sind Druckkämme, die vor allem in Getrieben von Turbomaschinen zum Einsatz kommen. Das Verformungsverhalten von Druckkämmen ist in /1/ eingehend untersucht worden. Das darin vorgeschlagene Ersatzmodell ist für die in diesem Artikel vorgestellten Untersuchungen vereinfacht worden (**Bild 1**). Insbesondere wurde auf den Einfluss der Temperatur und der Fliehkraft verzichtet.

Die Temperatur hat auf Pressverbände nur einen Einfluss, wenn sich eine Differenztemperatur zwischen Welle und Nabe ausbildet. Dieser Temperaturunterschied wird auch zum Fügen verwendet und kann mehrere 100 °C betragen. Aufgrund der guten Wärmeleitung ist es daher relativ Unwahrscheinlich, dass sich diese Differenz im realen Betrieb ausbildet. Da in der vorliegenden Untersuchung kleine Geometrien untersucht wurden, hat die Fliehkraft nur einen geringen Einfluss, so lange die Drehzahlen in technisch realisierbaren Bereichen bleiben.

Der schlecht abschätzbare Reibfaktor wurde ebenso konstant angesetzt wie die Linearsteifigkeiten von Fügestelle und Welle.

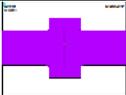
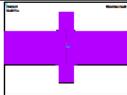


**Bild 1:** Ersatzmodell für die FEM-Untersuchungen der eingespannten Kreisringplatte

Auf Basis dieses Ersatzmodells sind FEM-Untersuchungen durchgeführt worden, in denen die drei Parameter Geometrieverhältnis, Biegesteifigkeit der Welle und Passfugendruck in jeweils drei Stufen untersucht wurden. Das Geometrieverhältnis  $k_{Ge0}$  ist der Quotient aus

Nabenhöhe zu Nabenbreite und errechnet sich zu  $k_{Geo} = 10 \cdot \frac{D_{aA} - D_F}{2 \cdot B}$ . Der Faktor 10 dient der besseren Darstellung.

Die Biegesteifigkeit der Welle über die freie Länge zwischen den Einspannstellen verändert und der Passfugendruck ( $p_F$ ) wird über unterschiedliche Übermaße eingestellt. Die gewählten Stufen für die einzelnen Parameter sind in **Tabelle 1** aufgeführt. Dort ist auch eine bildliche Darstellung des Geometrieverhältnisses sichtbar.

Parameter	1. Stufe	2. Stufe	3. Stufe
Geometrie			
	04	12	21
$D_{aA}$ [mm]	50	60	72
$B$ [mm]	25	12	10
$D_F$ [mm]	30		
$L_{Welle}$ [mm]	150	200	250
Übermaß $U$ [ $\mu\text{m}$ ]	30	60	90
E-Modul [GPa]	210		
Querkontraktionszahl	0,3		

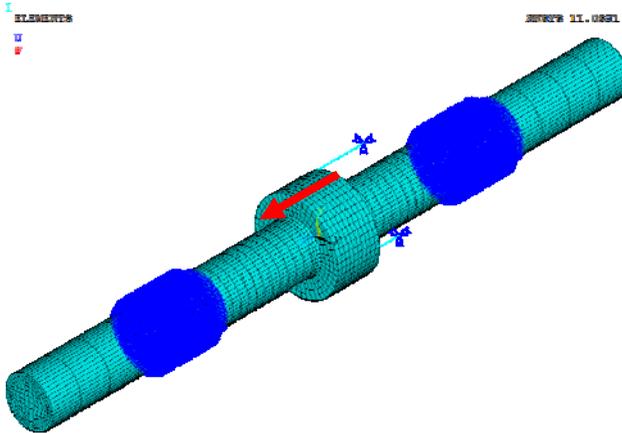
**Tabelle 1:** Geometrie der Druckkammprüflinge

### 3 Numerische Untersuchungen

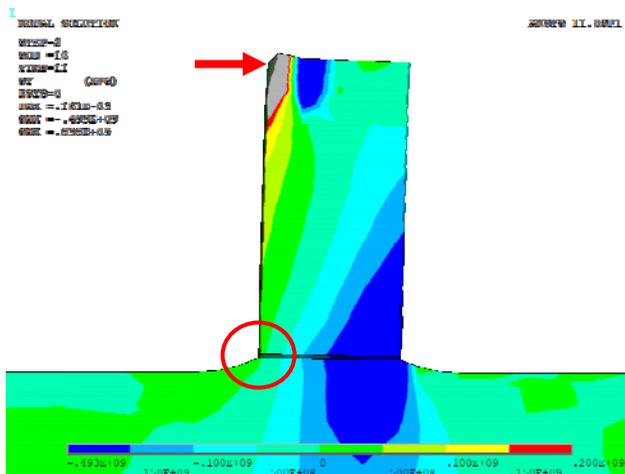
Für die FEM-Untersuchungen wurde ein Vollmodell aufgebaut, mit dem alle beschriebenen Parameter abgebildet werden können. Da später der Abgleich mit Biegeversuchen geplant ist, orientiert sich das Modell an dem geplanten Prüfstand. Insbesondere ist dieses an den blau dargestellten Einspannstellen zu sehen, die den Konusspannelementen im späteren Versuch nachempfunden sind. Die Kräfteinleitung erfolgt punktuell auf der Oberseite und ist durch den roten Pfeil gekennzeichnet (**Bild 2**).

Für die Untersuchungen wurde die Axialkraft schrittweise erhöht, bis es zum Abrutschen der Nabe von der Welle kam. Für die Auswertung wurde für jeden Belastungsschritt die Verformung der Nabenaussenkante sowie die Lücke der Elemente über die Nabelnänge unterhalb der Kräfteinleitung herausgeschrieben. Der Zeitpunkt des ersten Aufklaffens wurde dadurch detektiert, dass die Vergleichsspannung im Kontakt von Druck- auf Zugspannung wechselt (**Bild 3**).

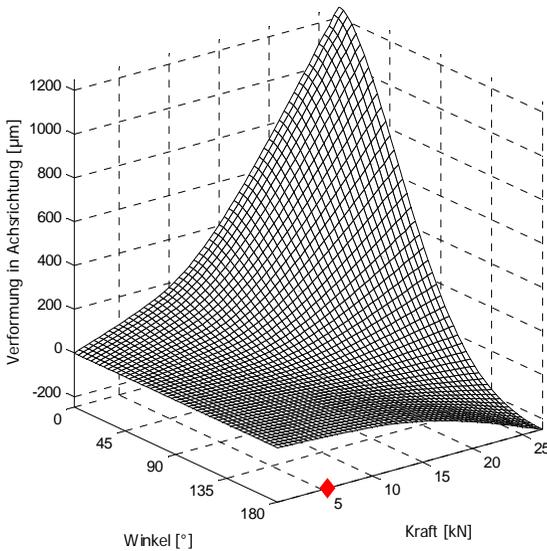
Aus der Verformung der Nabe wird deutlich, dass sich das Verformungsverhalten ab diesem Punkt ändert. In **Bild 4** ist der Punkt des Aufklaffens durch ein Symbol auf der Kraftachse markiert. Die Verformung an Stelle der Krafteinleitung ( $0^\circ$ ) ändert ab diesem Punkt deutlich ihre Steigung. Dieses ist damit erklärbar, dass die Einspannung von fest auf drehbar gelagert wechselt.



**Bild 2:** Darstellung des FEM-Vollmodells mit Einspannung (blau) und Krafteinleitung (rot)



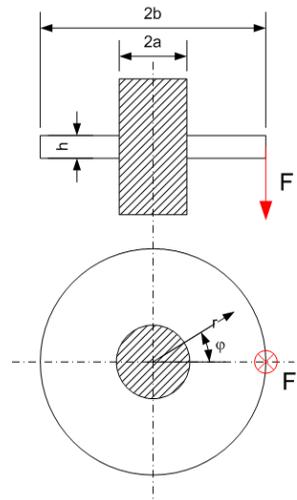
**Bild 3:** Verformung der Nabe zum Zeitpunkt des Aufklaffens (Wechsel von Druck- (türkis) auf Zugspannung (grün))



**Bild 4:** Verformung des Nabenaußenrandes in Abhängigkeit von Position (Winkel) und Axialkraft

In **Bild 6** ist diese Verformung am Nabenaußenrand vergleichend für die drei Geometrien aufgetragen. Es ist deutlich erkennbar, dass mit kleinerem Geometrieverhältnis höhere Kräfte nötig sind, um die gleiche Verformung zu erreichen. Darüber hinaus unterscheidet sich der Verlauf der dicken Kreisringplatte ( $k_{Geo} = 04$ ) insofern von den übrigen Verläufen, dass nach dem überschreiten der Klaffkraft ( $F_K = 30$  kN) die Verformungsänderung immer größer wird und die Nabe vor dem Abrutschen überstülpt, was aus dem steilen Anstieg ab einer Kraft von  $F = 80$  kN ersichtlich ist.

Die beiden anderen Naben zeigen nicht so gutmütiges Verhalten, sie verkippen mit zunehmender Belastung immer stärker und rutschen dann schlagartig ohne Zunahme der Verformungsänderung ab.



**Bild 5:** Ersatzmodell nach /2/

#### 4 Analytischer Vergleich

Bemerkenswert ist jedoch der Vergleich mit einer analytischen Abschätzung der Verformung. Ausgehend von der Theorie der fest eingespannten Kreisringplatte, die symmetrisch am Außenrand belastet wird, kann über eine Fourier-Reihenentwicklung der hier untersuchte Belastungsfall nachgestellt werden [2]. Das zugehörige Ersatzmodell ist in **Bild 5** dargestellt.

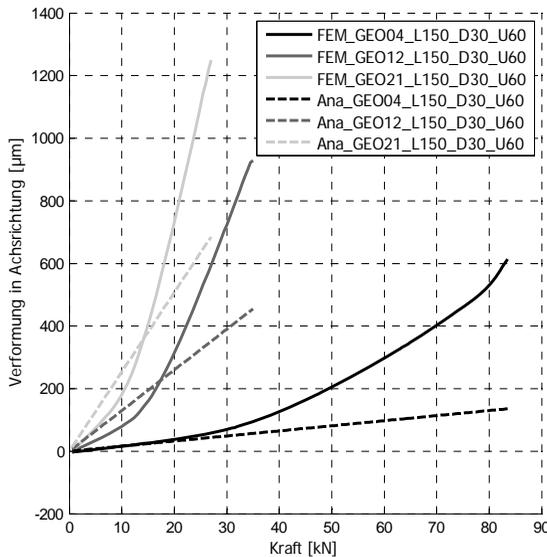
Die Verformung am Nabenaussenrand errechnet sich für ein  $k_{Geo}$  von 12 zu:

$$w(b, \varphi) = \frac{F \cdot a^2}{\pi \cdot K} \cdot (0,0839 + 0,194 \cdot \cos \varphi + 0,160 \cdot \cos 2\varphi + 0,103 \cdot \cos 3\varphi + 0,057 \cdot \cos 4\varphi + 0,031 \cdot \cos 5\varphi + \dots)$$

$$\text{mit } K = -\frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Hierbei gibt  $K$  die Plattensteifigkeit an. Für den Lastangriffspunkt ist  $\varphi = 0^\circ$ , somit ergibt sich für die Durchbiegung

$$w(\text{Lastangriff}) = 0,6815 \cdot \frac{F \cdot a^2}{\pi \cdot K}$$



**Bild 6:** Vergleich der Verformungen aus numerischer und analytischer Berechnung

Die Ergebnisse für die drei Geometrien sind in **Bild 6** vergleichend zu den numerischen Ergebnissen aufgetragen. Entgegen der Erwartung, dass die Theorie für die Kreisringplatte mit  $k_{Geo} = 12$  am Besten passt, überschätzt die analytische Berechnung in diesem Fall die Verformung, gleiches gilt für die plattenähnliche  $k_{Geo} = 21$ . Für die dicke Nabe zeigt sich im Bereich der festen Einspannung überraschenderweise eine sehr gute Übereinstimmung.

## 5 Abschätzung der Klaffkraft

Neben dem analytischen Vergleich wurde die Klaffkraft für jede Versuchskombination in einen vollfaktoriellen Wirkflächenversuchsplan übertragen /3/. Die ermittelten Wirkflächen sind in **Bild 7** aufgetragen.

In den beiden rechten Diagrammen ist die freie Wellenlänge jeweils gegenüber dem Übermaß  $U$  und dem Geometriefaktor  $k_{Geo}$  aufgetragen. Aus den senkrechten bzw. waagerechten Verläufen ist ersichtlich, dass die Wellensteifigkeit nur einen verschwindend geringen Einfluss auf die Kraft hat, die für das Aufklaffen der Nabe sorgt.

Anders sieht dieses für die das dritte Diagramm auf der linken Seite aus. Der geschwungene Verlauf der Isolinien zeigt eine starke Wechselwirkung zwischen dem Übermaß und dem Geometriefaktor, so dass zur Berechnung der Klaffkraft nicht nur die einzelnen Werte sondern auch ein gemischter Faktor für die Wechselwirkung eingerechnet werden muss.

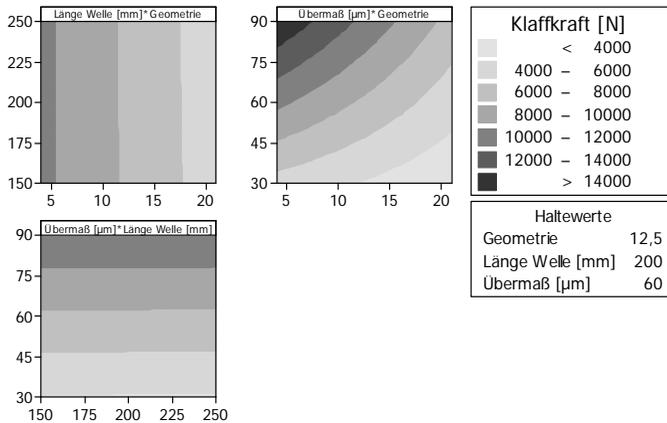
Da dem Wirkflächendiagramm ein lineares, mathematisches Modell zugrunde liegt, kann für die Klaffkraftberechnung eine empirische Formel angegeben werden, die sich aus der numerischen Untersuchung ergibt.

Mit Berücksichtigung der beschriebenen Wechselwirkung kann die Klaffkraft für den Parameterraum wie folgt abgeschätzt werden:

$$F_K = 4413 + 4353 \cdot k_{Geo} + 142 \cdot U - 5,2 \cdot k_{Geo} \cdot U$$

Dabei wird die Klaffkraft  $F_K$  in Newton, der Geometriefaktor  $k_{Geo}$  wie in Abschnitt 2 beschrieben und das Übermaß  $U$  in Mikrometern angegeben.

Inwieweit diese Formel Bestand hat, wird in Zukunft durch experimentelle Untersuchungen untermauert, für die ein kleiner Prüfstand entwickelt wurde. Diese Versuche, die mit Hilfe der 3D-Koordinatenmesstechnik durchgeführt werden, stehen allerdings noch aus.



**Bild 7:** Wirkflächendiagramm für die Klaffkraft in Achsrichtung in Abhängigkeit von Übermaß, Geometrie und Wellensteifigkeit

## 6 Zusammenfassung

Die beschriebenen Untersuchungen zeigen, dass auch für dicke Kreisringplatten eine analytische Formel zur Verformungsberechnung angegeben werden kann. Weiterhin wird eine Formel zur Abschätzung der Klaffkraft von Pressverbänden, die dicke Kreisringplatten beinhalten, gegeben. Nach der Verifikation der Berechnung durch entsprechende Experimente steht der Erweiterung der zugehörigen Berechnungsvorschriften daher nichts mehr im Wege.

## 7 Literatur

- /1/ Dietz, P.: Abschlussbericht zum Forschungsprojekt Di 289/24-1: Druckkämme unter instationärer Axialkraftbelastung. Clausthal-Zellerfeld
- /2/ Göldner, H.: Arbeitsbuch Höhere Festigkeitslehre : Elastizitätstheorie, Plastizitätstheorie, Viskoelastizitätstheorie. 2. Aufl. Leipzig : Fachbuchverl., 1981
- /3/ Thoden, D. ; Lohrengel, A. ; Dietz, P.: Aktuelle Entwicklungen in der Druckkammauslegung : DMK 2009 - Dresdner Maschinenelemente Kolloquium : 24. und 25. November 2009. Dresden : TUDpress, 2009