

## Teilplastische Auslegung der durch Bohrungen geschwächten Welle-Nabe-Preßverbindungen

Tan, L.

*Im Vergleich zu den ungeschwächten Welle-Nabe-Preßverbänden haben die durch Bohrungen geschwächten Preßverbände mit gleichen Konstruktionsgrößen und Schrumpfmaß hohe Spannungsspitze  $\sigma_{max}$  am Bohrungsrand und verringerte durchschnittliche Flächenpressung  $\bar{p}$  auf der Fügefäche. Im rein elastischen Bereich wird die Übertragungsfähigkeit wesentlich begrenzt. Um die Festigkeit des Werkstoffs besser auszunützen, können unter bestimmten Voraussetzungen elastisch-plastische Beanspruchungen an den Bohrungen zugelassen werden. Dazu wurden Untersuchungen für geschwächte Welle-Nabe-Preßverbindungen im teilplastischen Bereich durchgeführt.*

### 1 Allgemeine Betrachtung zur teilplastischen Auslegung der geschwächten Welle-Nabe-Preßverbände

In DIN 7190 wird die Theorie des ebenen Spannungszustandes für teilplastisch beanspruchte Preßverbände empfohlen. Für die teilplastische Auslegung der geschwächten Welle-Nabe-Preßverbindungen wird angenommen, daß

- Welle und Nabe aus homogenen und isotropen Werkstoffen mit elastisch-plastischem Verhalten bestehen,
- Welle und Nabe im gefügten Zustand gleiche homogene Temperatur aufweisen,
- die durch den Preßsitz zu fügende Welle und Nabe während ihrer gesamten Lebensdauer im gefügten Zustand verbleiben,
- die übrigbleibende elastische Zone in der durch Bohrungen geschwächten Welle oder Nabe groß genug ist und daher ausreichende Stützwirkung von der elastischen Zone vorhanden ist.

In der teilplastisch beanspruchten Welle oder Nabe übt die elastische auf die plastische Zone eine Stützwirkung aus. Dadurch weisen die Verschiebungen und Dehnungen in der plastischen Zone die gleiche Größenordnung auf wie in der elastischen Zone, womit die folgenden Vereinfachungen plausibel sind.

- Die Verzerrungen sind klein und können daher

nach der infinitesimalen Theorie aus den Komponenten des Verschiebungsvektors berechnet werden,

- die Deformationen sind klein, damit kann der Unterschied zwischen verformter und unverformter Geometrie vernachlässigt werden.

Die Untersuchung der teilplastisch beanspruchten geschwächten Preßverbände wird auf die plastische Verformung an den Bohrungen beschränkt. Im übrigen Bereich des geschwächten Teiles und im ungeschwächten Gegenteil herrscht ein rein elastischer Spannungszustand.

Zur Simulation des elastisch-plastischen Verhaltens der Konstruktionswerkstoffe kann ein Näherungsgesetz in die FE-Berechnungen aufgenommen werden. Von grundlegender Bedeutung - auch gegenüber früheren Arbeiten zum elasto-plastischen Verhalten bei Preßverbänden - ist, ob im plastischen Bereich eine Verfestigung des Werkstoffs berücksichtigt werden kann. (Werkstoffe, die im plastischen Bereich entfestigen, scheiden für teilplastisch beanspruchte Preßverbände aus.)

Die Spannungs-Dehnungs-Linie für Konstruktionsstähle ist genügend genau durch das linear verfestigende Verhalten

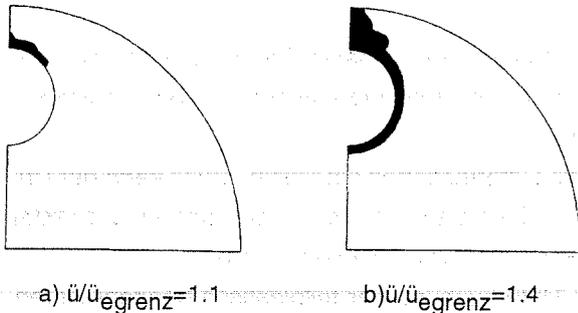
$$\begin{aligned} \sigma &= E \cdot \epsilon && \text{für } -\epsilon_f < \epsilon < \epsilon_f \\ \sigma &= R_e \cdot \text{sgn}(\epsilon) + (\epsilon - \epsilon_f) \cdot E_{pl} && \text{für } |\epsilon| > \epsilon_f \quad (1) \end{aligned}$$

approximiert (Streckgrenze  $R_e$ , Dehnung an der Streckgrenze  $\epsilon_f$  und Verfestigungsersatzmodul  $E_{pl} = \Delta\sigma / \Delta\epsilon$  für  $|\epsilon| > \epsilon_f$ ). Der extreme Fall  $E_{pl} = 0$  stellt das elastisch-idealplastische Verhalten dar.

### 2 Fugendruck-Übermaß-Verhältnis im elastischen und teilplastischen Bereich

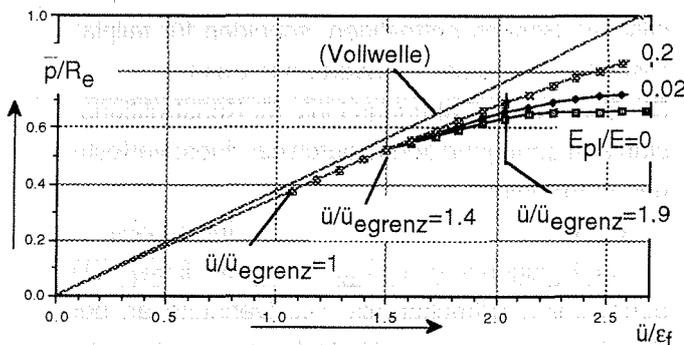
Am Beispiel einer durch zwei Axialbohrungen geschwächte Welle ohne Montagereibung zeigt **Bild 1** die plastische Zone bei zunehmendem Übermaß. Die plastische Zone entsteht an der am höchsten beanspruchten Stelle des Bohrungsrandes und nimmt mit steigenden Übermaß stetig zu. Schließlich erreicht die plastische Zone die Fügefäche oder die beiden plastischen Zonen an Nachbarbohrungen treffen sich, dadurch ist die dünnste Stelle der Boh-

rungswand zwischen Bohrung und Fügefläche oder zwischen den Nachbarbohrungen plastisch verformt.



**Bild 1** Plastische Zonen einer Welle mit 2 Bohrungen ohne Montagereibung  
 $r_b/r_f=0.2$   $e/r_f=0.625$   $Q_N=0.5$

Für dieses Beispiel zeigt **Bild 2** den auf die Streckgrenze  $R_e$  bezogenen durchschnittlichen Fugendruck  $\bar{p}$  in Abhängigkeit vom auf  $\epsilon_f$  bezogenen Übermaß  $\bar{u}$ . Da das Übermaß  $\bar{u}=(r_{fW}-r_{fN})/r_f$  dieselbe Dimension wie die Dehnungen besitzt, wird es durch Bezug auf die Dehnung bei der Streckgrenze  $\epsilon_f$  dimensionslos gemacht. Das Bild stellt das typische Fugendruck-Übermaß-Verhalten der durch Bohrungen geschwächten Welle dar.



**Bild 2** Fugendruck-Übermaß-Verhältnis der Welle mit 2 Bohrungen

Hieraus ist zunächst anschaulich abzuleiten:

- Wenn die maximale Bohrungsrandspannung  $\sigma_{vmax}$  die Streckgrenze  $R_e$  erreicht, wird die Welle rein elastisch am stärksten beansprucht. Der durchschnittliche Fugendruck  $\bar{p}$  und das Übermaß  $\bar{u}$  werden in diesem Fall als elastischer Grenzdruck  $\bar{p}_{egrenz}$  und elastisches Grenzübermaß  $\bar{u}_{egrenz}$  bezeichnet. Die Formzahl  $\alpha_k$  und der Minderungsfaktor der Übertragungsfähigkeit  $\eta$  für elastische Auslegung werden definiert zu:

$$\alpha_k = \sigma_{vmax} / q \tag{3}$$

$$\eta = \bar{p} / q \tag{4}$$

Durch Einsetzen  $\sigma_{vmax}=R_e$  und  $\bar{p}=\bar{p}_{egrenz}$  in (3) und (4) ergibt sich die Formel für den elastischen Grenzdruck  $\bar{p}_{egrenz}$ :

$$\bar{p}_{egrenz} = \eta R_e / \alpha_k \tag{5}$$

Durch Einsetzen  $\bar{u}=\bar{u}_{egrenz}$  und  $q=R_e/\alpha_k$  in die Grundgleichung der Preßverbände

$$\bar{u} = \frac{2 \cdot q}{E \cdot (1 - r_f^2/r_a^2)} \tag{6}$$

folgt die Formel für das elastische Grenzübermaß  $\bar{u}_{egrenz}$ :

$$\bar{u}_{egrenz} = \frac{2 \cdot R_e}{E \cdot \alpha_k \cdot (1 - r_f^2/r_a^2)} \tag{7}$$

- Mit  $\sigma_{vmax} > R_e$  ist die Welle teilplastisch beansprucht. Solange die dünnste Stelle der Bohrungswand zwischen Bohrung und Fügefläche oder zwischen Nachbarbohrungen nicht vollplastisch beansprucht ist, weicht der durchschnittliche Fugendruck  $\bar{p}$  nur "geringfügig" von der Linearität zum Übermaß  $\bar{u}$  ab ( $1 < \bar{u}/\bar{u}_{egrenz} < 1.4$  in Bild 2). Dieser Bereich wird als Bereich mit zulässigen plastischen Verformungen bezeichnet. Durch die Stützwirkung der verbleibenden elastischen Zone behält die plastische Dehnung  $\epsilon_p$  am Bohrungsrand die gleiche Größenordnung wie die Dehnung an der Streckgrenze  $\epsilon_f$ . Im Vergleich zur rein elastischen Auslegung kann sich die Übertragungsfähigkeit in diesem Beispiel mit zulässigen plastischen Verformungen um 40% erhöhen.
- Sobald die dünnste Stelle der Bohrungswand zwischen Bohrung und Fügefläche oder zwischen Nachbarbohrungen vollplastisch verformt ist, krümmen sich die Fugendruck-Übermaß-Linien stärker mit abnehmendem Verfestigungsersatzmodul  $E_{pl}$  ( $\bar{u}/\bar{u}_{egrenz} > 1.4$  in Bild 2). Der Fugendruck, bei dem die dünnste Stelle der Bohrungswand zwischen Bohrung und Fügefläche oder zwischen Nachbarbohrungen gerade vollplastisch verformt ist, wird als teilplastischer Grenzdruck  $\bar{p}_{pgrenz}$  bezeichnet.
- Sobald die dünnsten Stellen der Bohrungswand sowohl zwischen Bohrung und Fügefläche als auch zwischen Nachbarbohrungen vollplastisch verformt sind, verhält sich die Welle wie ein rein

plastisch beanspruchtes Bauteil, obwohl dabei noch elastische Zonen in der Welle übrigbleiben ( $\bar{u}/\bar{u}_{egrenz} > 1.9$  in Bild 2). Aufgrund des Mangels an Stützwirkung der elastischen Zone kann die plastische Dehnung  $\epsilon_p$  auf unzulässige Größenordnung steigen.

Ingenieurmäßig von wichtiger Bedeutung ist der teilplastische Bereich zwischen der rein elastischen Grenzbelastung  $\bar{u}/\bar{u}_{egrenz}=1$  und dem merklichen Abweichen von der linearen Fugendruck-Übermaßlinie in Bild 2. In diesem Bereich übt die elastische Zone eine ausreichende Stützwirkung auf die plastischen Zonen aus. Dadurch weisen die Deformationen in den plastischen Zonen die gleiche Größenordnung wie in den elastischen auf und die Steifigkeiten  $\bar{p}/\bar{u}$  bleiben fast unverändert im Vergleich zur rein elastisch beanspruchten Welle. Dieser teilplastische Bereich wird dem Konstrukteur als Bereich mit ingenieurmäßig zulässigen plastischen Verformungen empfohlen.

Vergleichsberechnungen wurden auch für diese geschwächten Welle gleicher Geometrie ohne Montageutschen durchgeführt. Durch die Umfangschubkraft auf der Fügefläche übt die rein elastische Nabe eine größere Stützwirkung auf die teilplastische Welle aus. Nachdem die dünnste Stelle der Bohrungswand zwischen Bohrung und Fügefläche oder zwischen Nachbarbohrungen vollplastisch verformt ist, vermindert sich die Steifigkeit  $\bar{p}/\bar{u}$ . Nur wenn die dünnsten Stellen der Bohrungswand sowohl zwischen Bohrung und Fügefläche als auch zwischen Nachbarbohrungen vollplastisch verformt sind, verhält sich die geschwächte Welle wie eine rein plastisch beanspruchte Welle. Da der Oberflächenzustand und die Wirkung beim Fügevorgang in der Praxis meist nicht abgeschätzt werden kann und die Vernachlässigung der Reibung auf der sicheren Seite steht, wird empfohlen, nach folgenden Festigkeits- und Steifigkeitsbedingungen für den Grenzfall ohne Montagereibung auszugehen.

### 3 Steifigkeitsbedingung

Große plastische Verformungen führen zur Steifigkeitsverminderung der teilplastisch beanspruchten Welle. Dadurch wird die Erhöhung der Übertragungsfähigkeit im teilplastischen Bereich begrenzt. Um eine starke Steifigkeitsverminderung zu vermei-

den, muß die Größe der plastischen Zone beschränkt werden. Wenn die dünnsten Stellen der Bohrungswand zwischen Bohrung und Fügefläche und die zwischen Nachbarbohrungen der Welle mit mehreren Bohrungen noch teilweise elastisch beansprucht sind, ist die Steifigkeit  $\bar{p}/\bar{u}$  der Welle praktisch kaum vermindert. Für Wellen mit einer Bohrung ist die Übertragungsfähigkeitserhöhung auch durch die minimale Bohrungswandstärke begrenzt, wenn die Exzentrizität größer als der Bohrungsdurchmesser ist.

Der Fugendruck, bei dem die dünnste Stelle der Bohrungswand zwischen Bohrung und Fügefläche gerade vollplastisch beansprucht ist, wird als der durch die erste Steifigkeitsbedingung begrenzte teil-

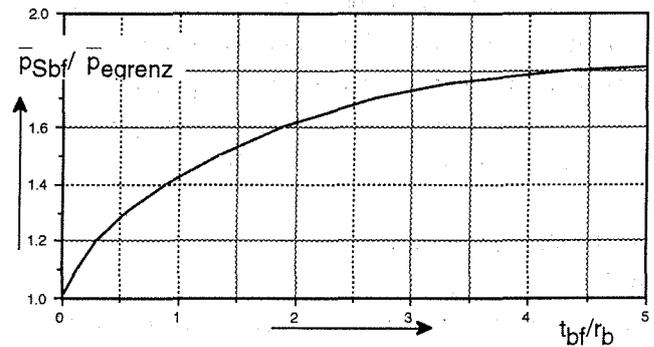


Bild 3 Teilplastischer Grenzflugendruck bei vollplastischer Bohrungswand zwischen Bohrung und Fügefläche

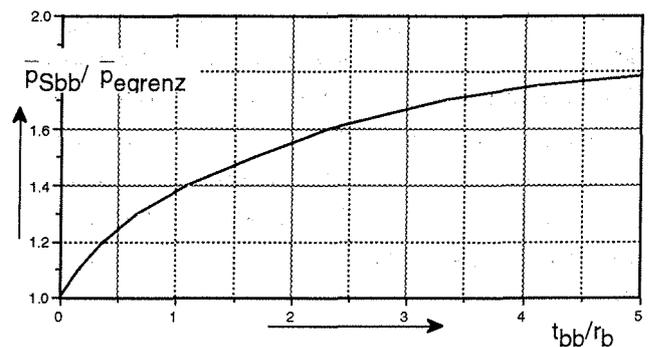


Bild 4 Teilplastischer Grenzflugendruck bei vollplastischer Bohrungswand zwischen Nachbarbohrungen

plastische Grenzflugendruck  $\bar{p}_{Sbf}$  bezeichnet und läßt sich mit der minimalen Bohrungswandstärke  $t_{bf}$  zwischen Bohrung und Fügefläche nach Bild 3 bestimmen.

Der Fugendruck, bei dem die dünnste Stelle der Bohrungswand zwischen Nachbarbohrungen gerade vollplastisch beansprucht ist, wird als der durch die zweite Steifigkeitsbedingung begrenzte teilpla-

stische Grenzdruck  $\bar{p}_{Sbb}$  bezeichnet und läßt sich mit der minimalen Bohrungswandstärke  $t_{bb}$  zwischen Nachbarbohrungen nach **Bild 4** bestimmen.

Die erste Steifigkeitsbedingung gegen vollplastische Bohrungswand zwischen Bohrung und Fügefläche

$$\bar{p} < \bar{p}_{Sbf} \quad (8)$$

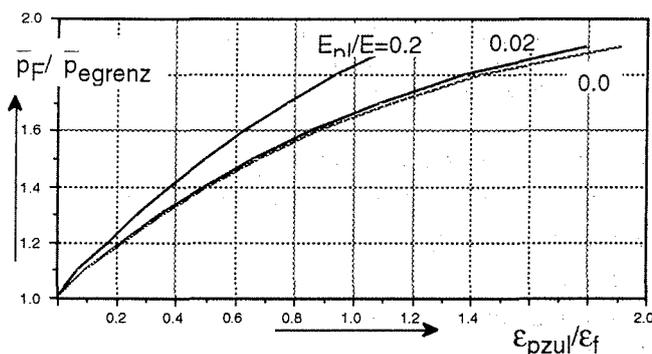
und die zweite gegen vollplastische Bohrungswand zwischen Nachbarbohrungen

$$\bar{p} < \bar{p}_{Sbb} \quad (9)$$

garantieren die Stützwirkung der elastischen Zone. Mit ausreichender Stützwirkung der elastischen Zone ist die Steifigkeitsbedingung ausschließlich durch Geometrieparameter zu bestimmen und praktisch unabhängig von dem Materialparameter  $E_{pl}$ . Solange die Steifigkeitsbedingungen (8) und (9) erfüllt sind, ist die Steifigkeit  $\bar{p}/\bar{u}$  der teilplastisch beanspruchten Welle praktisch unverändert gegenüber rein elastisch beanspruchten Wellen.

#### 4 Festigkeitsbedingung

Außer der Steifigkeitsbedingung ist bei der teilplastischen Auslegung noch die Festigkeitsbedingung zu erfüllen. Da im teilplastischen Bereich die Dehnungen das Grenzkriterium sind, werden statt einer Grenzspannungsbedingung die Grenzdehnungsbedingung  $\varepsilon_{pmax} < \varepsilon_{pzul}$  empfohlen. Dabei ist  $\varepsilon_{pmax}$  die maximale verbleibende plastische Dehnung am Bohrungsrund und  $\varepsilon_{pzul}$  die zulässige plastische Dehnung. Mit der wirklichen Spannungs-Dehnungs-Linie eines Werkstoffs und dem benötigten Sicherheitsfaktor ist der Konstrukteur in der Lage die zulässige plastische Dehnung  $\varepsilon_{pzul}$  zu bestimmen.



**Bild 5** Übertragungsfähigkeit und maximale plastische Dehnung für die geschwächte Welle

Der Fugendruck, bei dem die maximale plastische Dehnung  $\varepsilon_{pmax}$  am Bohrungsrund gerade die Grenze  $\varepsilon_{pzul}$  erreicht, wird als der durch die Festigkeitsbedingung begrenzte teilplastische Grenzdruck  $\bar{p}_F$  bezeichnet und läßt sich mit der zulässigen plastischen Dehnung  $\varepsilon_{pzul}$  nach **Bild 5** bestimmen.

Die Festigkeitsbedingung

$$\bar{p} < \bar{p}_F \quad (10)$$

berücksichtigt die maximale Beanspruchung am Bohrungsrund. Gegenüber der Spannungsbedingung  $\sigma_{vmax} < \sigma_{vzul}$  bietet diese Dehnungsbedingung für Werkstoffe mit schwacher Verfestigung, insbesondere für idealplastischen Werkstoff, ein maßgebendes Kriterium.

#### 5 Zusammenfassende Festigkeits- und Steifigkeitsbedingung

Die Übertragungsfähigkeit der geschwächten Welle läßt sich durch zulässige teilplastische Verformungen wesentlich erhöhen. Die Erhöhung der Übertragungsfähigkeit wird durch die Steifigkeitsbedingungen (8), (9) und die Festigkeitsbedingung (10) begrenzt. Der plastische Grenzdruck, der die Bedingungen (8) bis (10) gleichzeitig erfüllt, ist in folgender Form darstellbar

$$\bar{p}_{pgrenz} = \min(\bar{p}_{Sbf}, \bar{p}_{Sbb}, \bar{p}_F) \quad (11)$$

In **Bild 2** ist der Fugendruck des ungeschwächten rotationssymmetrischen Preßverbandes  $q$  auch dargestellt. **Bild 2** zeigt deutlich, daß die Steifigkeit  $\bar{p}/\bar{u}$  der geschwächten Welle im Bereich mit ingenieurmäßig zulässigen plastischen Verformungen praktisch unvermindert gegenüber der im rein elastischen Bereich ist. Solange die Steifigkeits- und Festigkeitsbedingungen erfüllt sind, ist der durchschnittliche Fugendruck  $\bar{p}$  praktisch proportional dem Übermaß  $\bar{u}$ . Nach dieser grundsätzlichen Kenntnis können die Formel  $\eta = \bar{p}/q$  und die entsprechenden Bilder für elastische Auslegung in /1/ auch für teilplastische Auslegungen mit ingenieurmäßig zulässigen plastischen Verformungen zugrundegelegt werden.

#### 6 Literatur

/1/ Dietz, P.; Tan, L.:

Geschwächte Preßverbände  
Bericht FVA191 1992